

2ÈME BAC SCIENCES PHYSIQUES & SVT · LEÇON 1

Limites et continuité

Indéterminations · Continuité · TVI

Ce que nous allons apprendre

- Les formes indéterminées
- Le conjugué et les racines
- Limites trigonométriques
- Continuité en un point
- Le théorème des valeurs intermédiaires
- Image d'un segment

Quatre formes

Forme	Technique
$\frac{\infty}{\infty}$	termes de plus haut degré
$\frac{0}{0}$	factoriser ou conjuguer
$\infty - \infty$	conjugué
$0 \times \infty$	réécrire en quotient

RAPPEL

$\frac{k}{0}$ n'est pas indéterminée : le **signe** du dénominateur décide.

Le piège de $-\infty$

RÈGLE

$\sqrt{x^2} = |x|$: en $+\infty$ c'est x , en $-\infty$ c'est $-x$.

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1.$
- 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1.$

3 · LE CONJUGUÉ

Lever une forme $\frac{0}{0}$

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}.$

1 Je multiplie par $\sqrt{x+3} + 2$.

2 J'obtiens $\frac{x - 1}{(x - 1) (\sqrt{x+3} + 2)}.$

3 Après simplification : $\frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \rightarrow \frac{1}{4}.$

Les limites de référence

À CONNAÎTRE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

❶ Je fais apparaître les bons arguments.

❷
$$\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{5}.$$

Trois choses à vérifier

DÉFINITION

f est continue en a si $f(a)$ existe, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, et si les deux sont égales.

Exemple. $f(x) = x^2 + 1$ pour $x \leq 1$ et $3x - 1$ pour $x > 1$.

- ➊ À gauche : 2 ; à droite : 2.
- ➋ $f(1) = 2$: la fonction est **continue** en 1.

Choisir la bonne valeur

Énoncé. Pour quel a la fonction valant $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et a en 2 est-elle continue ?

- ➊ Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$.
- ➋ La limite en 2 vaut 4.
- ➌ Il faut donc $a = 4$.

Existence et unicité

THÉORÈME

f continue sur $[a ; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$: il existe **au moins** une solution de $f(x) = 0$.

UNICITÉ

Si de plus f est strictement monotone, la solution est **unique**.

IMAGE D'UN SEGMENT

Par une fonction continue, l'image de $[a ; b]$ est un **segment**.

APPLICATION 1

Encadrer une racine

Énoncé. $x^3 + x - 1 = 0$ sur $[0 ; 1]$.

- ➊ $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante.
- ➋ $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: solution unique.
- ➌ $f(0,5) < 0$ et $f(0,75) > 0$: $\alpha \in]0,5 ; 0,75[$.

APPLICATION 2

Trois limites

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x}{x^3 - 1} = 5.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{4}.$$

L'essentiel de la leçon

Situation	Réflexe
$\frac{\infty}{\infty}$	termes dominants
Racine et $\frac{0}{0}$	conjugué
$-\infty$	$\sqrt{x^2} = -x$
Continuité	limite = valeur
Racine d'une équation	TVI + monotonie