

2ÈME BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 7

Calcul intégral

Intégrales · Aires · Surplus

Ce que nous allons apprendre

- Intégrale et primitive
- Propriétés de l'intégrale
- Intégration par parties
- Aire sous une courbe
- Valeur moyenne
- Surplus du consommateur

Le théorème fondamental

FORMULE

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

où F est **une** primitive de f .

REMARQUE

La constante C disparaît dans la différence : on peut choisir n'importe quelle primitive.

Quatre règles

Propriété	Écriture
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
Découpage	$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$
Orientation	$\int_a^b = -\int_b^a$
Positivité	$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

2 · EXEMPLE

Un calcul direct

Exemple. $\int_0^1 (3x^2 + 2)dx.$

- 1 Une primitive : $x^3 + 2x$.
- 2 $[x^3 + 2x]_0^1 = 3 - 0.$
- 3 L'intégrale vaut 3.

Quand un produit apparaît

FORMULE

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

CHOIX

On **dérive** le facteur polynomial (ou le **ln**) et on **primitive** l'exponentielle.

3 · EXEMPLE

$$\int_0^1 x e^x dx$$

- ➊ Je dérive x et je primitive e^x .
- ➋ $[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1)$.
- ➌ L'intégrale vaut 1.

Deux situations

SOUS UNE COURBE ($f \geq 0$)

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx$$

ENTRE DEUX COURBES ($f \geq g$)

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

4 · EXEMPLE

Entre $y = x$ et $y = x^2$

1 Sur $[0 ; 1]$, $x \geq x^2$: la droite est au-dessus.

2
$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1.$$

3 L'aire vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.

Lisser une variation

FORMULE

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Exemple. $f(x) = x^2$ sur $[0 ; 3]$: $\mu = \frac{1}{3} \times 9 = 3$.

Variations et surplus

Grandeur	Formule
Variation de coût	$\int_{q_1}^{q_2} Cm(q) \, dq$
Surplus du consommateur	$\int_0^{q^*} D(q) \, dq - p^* q^*$
Surplus du producteur	$p^* q^* - \int_0^{q^*} O(q) \, dq$

Un surplus du consommateur

Énoncé. Demande $p = 20 - q$; équilibre $p^* = 10$, $q^* = 10$.

1 $\int_0^{10} (20 - q) \, dq = \left[20q - \frac{q^2}{2} \right]_0^{10} = 150.$

2 Dépense effective : $p^* q^* = 100.$

3 Surplus : $150 - 100 = 50.$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Fondamentale	$F(b) - F(a)$
Par parties	$[uv] - \int uv'$
Aire entre deux courbes	$\int (f - g)$
Valeur moyenne	$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$
Surplus	$\int_0^{q^*} D - p^* q^*$