

2ÈME BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 6

Fonction exponentielle

Propriétés · Équations · Croissance continue

Ce que nous allons apprendre

- $\exp$, réciproque de $\ln$
- Les règles de calcul
- Dérivée et variations
- Équations et inéquations
- Croissances comparées
- Capitalisation continue

1 · DÉFINITION

La réciproque de $\ln$

ÉQUIVALENCE

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

SIGNE

$e^x > 0$ pour **tout** réel x : l'équation $e^x = 0$ n'a aucune solution.

Les règles

Règle	Formule
Somme	$e^{a+b} = e^a e^b$
Différence	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
Opposé	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
Puissance	$(e^a)^n = e^{na}$

Strictement croissante

DÉRIVÉE

$$(e^x)' = e^x \quad (e^u)' = u'e^u$$

LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ (asymptote } y = 0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Un changement de variable

Exemple. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

- ➊ Je pose $X = e^x > 0 : X^2 - 3X + 2 = 0$.
- ➋ $X = 1$ ou $X = 2$, tous deux positifs.
- ➌ $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

4 · UNE INÉQUATION

$$\underline{e^x \geq 2}$$

RÈGLE

exp est croissante : $e^a \leq e^b \iff a \leq b$, sans condition de domaine.

- 1 $e^x \geq 2$ équivaut à $x \geq \ln 2$.
- 2 Solutions : $[\ln 2; +\infty[$.

L'exponentielle l'emporte

Limite	Valeur
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$	0
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$	1

6 · UNE INÉGALITÉ

$$\underline{e^x \geq x + 1}$$

Démonstration. On étudie $g(x) = e^x - x - 1$.

- ❶ $g'(x) = e^x - 1$, négative avant 0, positive après.
- ❷ Minimum $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$.
- ❸ Ainsi $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

APPLICATION 1

$$\underline{f(x) = xe^{-x}}$$

- ➊ $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, du signe de $1 - x$.
- ➋ Maximum $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.
- ➌ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$: asymptote horizontale $y = 0$.

APPLICATION 2

Capitalisation continue

Énoncé. $C(t) = 10\,000 e^{0,05t}$.

- ➊ $C(5) = 10\,000 e^{0,25} \approx 12\,840$ dirhams.
- ➋ Doublement : $e^{0,05t} = 2$.
- ➌ $t = \frac{\ln 2}{0,05} \approx 13,9$ années.

Discret ou continu

Modèle	Formule
Taux annuel t	$C_0(1 + t)^n$
Taux continu r	C_0e^{rt}
Doublement (discret)	$\frac{\ln 2}{\ln(1+t)}$
Doublement (continu)	$\frac{\ln 2}{r}$

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Signe	$e^x > 0$
Dérivée	$u'e^u$
Somme	$e^{a+b} = e^a e^b$
Croissance comparée	$\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$
Croissance continue	$P_0 e^{rt}$