

2ÈME BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 5

Fonction logarithme népérien

Propriétés · Équations · Durées de placement

Ce que nous allons apprendre

- Définition et valeurs clés
- Les règles de calcul
- Domaine, dérivée, variations
- Équations et inéquations
- Croissances comparées
- Durée de doublement

1 · DÉFINITION

Une fonction sur $]0; +\infty[$

DÉFINITION

$\ln$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

VALEURS

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$; $\ln u$ n'existe que si $u > 0$.

Les règles

Règle	Formule
Produit	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
Quotient	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
Inverse	$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
Puissance	$\ln a^n = n \ln a$

Strictement croissante

DÉRIVÉE

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Toujours le domaine d'abord

RÈGLES

$\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a \leq \ln b \iff a \leq b$, une fois le domaine fixé.

Exemple. $\ln x + \ln(x + 1) = \ln 6$ avec $x > 0$.

- ❶ $\ln(x^2 + x) = \ln 6$, donc $x^2 + x - 6 = 0$.
- ❷ Racines 2 et -3 : seule $x = 2$ convient.

4 · UNE INÉQUATION

$$\ln(x - 2) \leq 0$$

- 1 Domaine : $x > 2$.
- 2 $\ln(x - 2) \leq \ln 1$ équivaut à $x - 2 \leq 1$.
- 3 Solutions : $]2 ; 3]$.

Le logarithme est lent

Limite	Valeur
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$	0
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$	0
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$	1

Résoudre $a^x = b$

FORMULE

$$a^x = b \iff x = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Exemple. $2^x = 10$ donne $x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$.

APPLICATION 1

Une durée de doublement

Énoncé. Un capital placé à 4 % par an.

- 1 On résout $(1,04)^n \geq 2$.
- 2 $n \ln 1,04 \geq \ln 2$, donc $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx 17,7$.
- 3 Il faut **18 années**.

APPLICATION 2

$$\underline{f(x) = x - \ln x}$$

- 1 Domaine $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x-1}{x}$.
- 2 Minimum $f(1) = 1 > 0$: la fonction reste strictement positive.
- 3 On en déduit l'inégalité $\ln x \leq x - 1$.

Les réflexes de l'exercice

- 1 Écrire le **domaine** avant tout calcul.
- 2 Regrouper les logarithmes en un seul.
- 3 Résoudre, puis **vérifier** chaque solution dans le domaine.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Produit	$\ln a + \ln b$
Dérivée	$\frac{u'}{u}$
Croissance comparée	$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$
Base a	$x = \frac{\ln b}{\ln a}$
Doublement	$\frac{\ln 2}{\ln(1+t)}$