



Dérivation et étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Dérivation et étude des fonctions

Série 2 — dérivées, variations, optimisation économique.

Exercice 1

Étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $f' > 0$ sur $] -\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$, $f' < 0$ sur $]0; 2[$.
Maximum local $f(0) = 2$, minimum local $f(2) = -2$.

Exercice 2

Étudier $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ sur son domaine et déterminer ses asymptotes.

Correction

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$: f est **décroissante** sur chaque intervalle. $\lim_{x \rightarrow 1} |f| = +\infty$: asymptote verticale $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 2$: asymptote horizontale $y = 2$.

Exercice 3

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 2.

Correction

$f(2) = 4$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(2) = 4$. Tangente : $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

Exercice 4

Le coût total est $C(q) = \frac{q^3}{3} - 4q^2 + 20q$ pour $q > 0$. Déterminer la quantité qui minimise le **coût marginal** $Cm(q) = C'(q)$.

Correction

$Cm(q) = q^2 - 8q + 20$, qui est une parabole de sommet $q = 4$. $Cm'(q) = 2q - 8$, négative avant 4 et positive après : le coût marginal est **minimal** en $q = 4$, avec $Cm(4) = 16 - 32 + 20 = 4$.

Exercice 5

La recette est $R(q) = 50q$ et le coût $C(q) = q^2 + 10q + 100$. Déterminer la production qui maximise le bénéfice.

Correction

$B(q) = R(q) - C(q) = -q^2 + 40q - 100$. $B'(q) = -2q + 40$, nulle en $q = 20$, positive avant et négative après : le bénéfice est **maximal** pour $q = 20$.

$$B(20) = -400 + 800 - 100 = 300.$$

Exercice 6

Étudier $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire le minimum du coût moyen correspondant.

Correction

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, nulle en $x = 1$. f décroît sur $]0; 1]$ et croît sur $[1; +\infty[$:

minimum $f(1) = 2$. Un coût moyen de cette forme est donc minimal pour une production de 1 unité, avec un coût unitaire de 2.

Exercice 7

Soit $C(q) = q^2 + 10q + 100$. Montrer que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Correction

$CM(q) = q + 10 + \frac{100}{q}$ et $CM'(q) = 1 - \frac{100}{q^2}$, nulle en $q = 10$.

$CM(10) = 10 + 10 + 10 = 30$ et $Cm(10) = C'(10) = 2 \times 10 + 10 = 30$: les deux coïncident. C'est une **règle générale** en économie : le coût moyen est minimal au point où il croise le coût marginal.