

2ÈME BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 2

Dérivation et étude des fonctions

Variations · Tangentes · Optimisation

Ce que nous allons apprendre

- Dérivées usuelles et opérations
- Équation de la tangente
- Signe de la dérivée et variations
- Extremums
- Grandeurs marginales
- Maximiser un bénéfice

Les dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Produit et quotient

Expression	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$

Une droite, deux informations

FORMULE

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple. $f(x) = x^2$ en $a = 2$: $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$, donc $y = 4x - 4$.

4 · VARIATIONS

Le signe de f'

Sur I	Conclusion
$f' > 0$	f croissante
$f' < 0$	f décroissante
$f' = 0$ sans changer de signe	pas d'extremum
f' change de signe	extremum

4 · EXAMPLE

$$\underline{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$$

- ➊ $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
- ➋ $f' > 0$ avant 0 et après 2, $f' < 0$ entre les deux.
- ➌ Maximum local $f(0) = 2$, minimum local $f(2) = -2$.

5 · UNE HOMOGRAPHIQUE

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

- 1 $f'(x) = \frac{2(x - 1) - (2x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}.$
- 2 $f' < 0$: la fonction **décroît** sur chaque intervalle.
- 3 Asymptotes : $x = 1$ et $y = 2$.

La dérivée en économie

Grandeur	Expression
Coût marginal	$Cm(q) = C'(q)$
Recette marginale	$Rm(q) = R'(q)$
Coût moyen	$CM(q) = \frac{C(q)}{q}$
Bénéfice	$B(q) = R(q) - C(q)$

APPLICATION 1

Maximiser un bénéfice

Énoncé. $R(q) = 50q$ et $C(q) = q^2 + 10q + 100$.

- ➊ $B(q) = -q^2 + 40q - 100$.
- ➋ $B'(q) = -2q + 40$, nulle en $q = 20$, positive avant et négative après.
- ➌ Bénéfice maximal $B(20) = 300$.

APPLICATION 2

Coût moyen minimal

Énoncé. $CM(q) = q + 10 + \frac{100}{q}$ pour $q > 0$.

- ❶ $CM'(q) = 1 - \frac{100}{q^2}$, nulle en $q = 10$.
- ❷ $CM(10) = 30$ et $Cm(10) = 2 \times 10 + 10 = 30$.
- ❸ Le coût moyen est minimal là où il **croise** le coût marginal.

Optimiser en quatre gestes

- 1 Écrire la fonction à optimiser et son domaine.
- 2 Dériver, puis résoudre $f'(q) = 0$.
- 3 Étudier le **signe** de f' , puis conclure et vérifier que q est admissible.

L'essentiel de la leçon

Outil	Formule
Quotient	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Tangente	$f'(a)(x - a) + f(a)$
Extremum	f' change de signe
Marginal	dérivée du total
Bénéfice max	$Rm = Cm$