



Limites et continuité — Exercices d'approfondissement

2ème Bac · Limites et continuité

Série 2 — formes indéterminées, continuité et applications économiques.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Correction

Pour $x \neq 3$: $\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$. La limite vaut 6.

Exercice 2

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 1}$.

Correction

Je factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

La limite vaut 3.

Exercice 3

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Correction

Je multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{x+1} + 1$:

$$\frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}.$$

La limite vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$.

Correction

Pour $x < 2$, $x - 2 < 0$: la limite à gauche est $-\infty$. Pour $x > 2$, $x - 2 > 0$: la limite à droite est $+\infty$. La droite d'équation $x = 2$ est une **asymptote verticale**.

Exercice 5

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = a$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 2 ?

Correction

Pour $x \neq 2$: $f(x) = x + 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. La continuité en 2 exige $f(2) = 4$, donc $a = 4$.

Exercice 6

Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une solution unique dans $]1 ; 2[$.

Correction

$f(x) = x^3 + x - 3$ est continue et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante.
 $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une solution **unique** dans $]1 ; 2[$.

Exercice 7

Le coût total de production de q articles est $C(q) = q^2 + 10q + 100$. On appelle coût moyen

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} \text{ pour } q > 0.$$

1. Calculer $\lim_{q \rightarrow 0^+} CM(q)$ et interpréter.
2. Calculer $\lim_{q \rightarrow +\infty} (CM(q) - q)$.

Correction

$$CM(q) = q + 10 + \frac{100}{q}.$$

1. $\lim_{q \rightarrow 0^+} CM(q) = +\infty$: pour une très petite production, le coût fixe de 100 est réparti sur très peu d'articles, donc le coût unitaire explose.
2. $CM(q) - q = 10 + \frac{100}{q} \rightarrow 10$: la courbe du coût moyen admet la droite $y = q + 10$ comme **asymptote oblique**.