

2ÈME BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 1

Limites et continuité

Formes indéterminées · Asymptotes · TVI

Ce que nous allons apprendre

- Limites et opérations
- Lever une forme indéterminée
- Limites à gauche et à droite
- Asymptotes
- Continuité et prolongement
- Le théorème des valeurs intermédiaires

Quatre cas indéterminés

À RECONNAÎTRE

$$\frac{0}{0} \cdot \frac{\infty}{\infty} \cdot \infty - \infty \cdot 0 \times \infty$$

LES GESTES

Factoriser · **simplifier** · utiliser la **quantité conjuguée** · mettre au **même dénominateur**.

2 · LA FORME $\frac{0}{0}$

Factoriser puis simplifier

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$

- 1 Les deux termes s'annulent en 3.
- 2 $\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3.$
- 3 La limite vaut 6.

Factoriser le terme dominant

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 1}$.

- 1 Je factorise par x^2 en haut et en bas.
- 2
$$\frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$
- 3 La limite vaut 3.

La quantité conjuguée

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$

- 1 Je multiplie haut et bas par $\sqrt{x+1} + 1$.
- 2 Il reste $\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}.$
- 3 La limite vaut $\frac{1}{2}.$

Trois lectures

Limite	Asymptote
$\lim_{x \rightarrow a} f = \pm\infty$	verticale $x = a$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f = b$	horizontale $y = b$
$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$	oblique $y = ax + b$

À gauche et à droite

Exemple. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$.

- 1 Pour x un peu plus petit que 2, $x - 2$ est **négatif** : limite $-\infty$.
- 2 Pour x un peu plus grand que 2, $x - 2$ est **positif** : limite $+\infty$.
- 3 La droite $x = 2$ est une asymptote verticale.

Trois conditions

EN UN POINT a

f est définie en a , la limite en a existe, et elle est **égale** à $f(a)$.

PROLONGEMENT

Si la limite ℓ est finie mais $f(a)$ n'existe pas, on pose $f(a) = \ell$: la fonction devient continue.

Existence d'une solution

ÉNONCÉ

f continue sur $[a; b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de **signes contraires** : l'équation $f(x) = 0$ a une solution dans $]a; b[$.

UNICITÉ

Si f est en plus **strictement monotone**, cette solution est **unique**.

APPLICATION 1

Un coût moyen

Énoncé. $C(q) = q^2 + 10q + 100$, donc $CM(q) = q + 10 + \frac{100}{q}$.

- 1 $\lim_{q \rightarrow 0^+} CM(q) = +\infty$: le coût fixe écrase une très petite production.
- 2 $CM(q) - (q + 10) = \frac{100}{q} \rightarrow 0$.
- 3 Asymptote **oblique** $y = q + 10$.

APPLICATION 2

Un bénéfice plafonné

Énoncé. $B(q) = \frac{100q - 500}{q + 5}$ en milliers de dirhams.

- 1 Je factorise par q : $\frac{100 - \frac{500}{q}}{1 + \frac{5}{q}}$.
- 2 La limite en $+\infty$ vaut 100.
- 3 Le bénéfice **plafonne** à 100 000 dirhams.

L'essentiel de la leçon

Situation	Méthode
$\frac{0}{0}$	factoriser
$\frac{\infty}{\infty}$	terme dominant
Avec racine	conjuguée
Trou en a	prolongement
Équation $f(x) = 0$	TVI + monotonie