

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 14

Dénombrement

Listes · Arrangements · Combinaisons · Newton

Ce que nous allons apprendre

- Le principe multiplicatif
- p -listes et arrangements
- Permutations et anagrammes
- Combinaisons
- Pascal et le binôme de Newton
- Compter avec conditions

Ordre ? Répétition ?

Situation	Ordre	Répétition	Formule
p -liste	oui	oui	n^p
Arrangement	oui	non	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	oui	non ($p = n$)	$n!$
Combinaison	non	non	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Les mots qui comptent

L'énoncé dit...	C'est...
« simultanément »	une combinaison
« successivement sans remise »	un arrangement
« successivement avec remise »	une p -liste
« un président, un secrétaire... »	un arrangement (rôles distincts)

Comité ou bureau ?

Énoncé. Dans une classe de 30 élèves.

- 1 Comité de 3 élèves : $\binom{30}{3} = 4\,060$.
- 2 Président, secrétaire, trésorier : $A_{30}^3 = 24\,360$.
- 3 Le rapport vaut $3! = 6$: c'est le nombre d'ordres possibles.

Avec lettres répétées

FORMULE

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

où n_i est le nombre de répétitions de chaque lettre.

- ❶ « MATHS » : 5 lettres distinctes, donc $5! = 120$.
- ❷ « ANNEE » : deux N , deux E , donc $\frac{120}{4} = 30$.
- ❸ « RAPPORT » : deux R , deux P , donc $\frac{5\,040}{4} = 1\,260$.

Découper en catégories

Énoncé. Urne : 5 rouges, 4 vertes. On tire 3 boules simultanément.

- 1 Total : $\binom{9}{3} = 84$.
- 2 Exactement 2 rouges : $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 40$.
- 3 Je **multiplie** les choix faits dans chaque catégorie.

Symétrie et Pascal

FORMULES

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

INTERPRÉTATION DE PASCAL

On fixe un élément a : les parties à $k + 1$ éléments le contiennent ou non.

SOMME TOTALE

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n : \text{c'est le nombre de parties d'un ensemble à } n \text{ éléments.}$$

Développer une puissance

FORMULE

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple. $(a + b)^4$.

- ❶ Coefficients : 1, 4, 6, 4, 1.
- ❷ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

« Au moins un »

ASTUCE

Compter « au moins un » est souvent plus long que compter « aucun » puis soustraire du total.

Exemple. Tirages de 3 boules parmi 5 rouges et 4 vertes contenant au moins une verte.

- 1 Total : $\binom{9}{3} = 84$.
- 2 Aucune verte : $\binom{5}{3} = 10$.
- 3 Réponse : $84 - 10 = 74$.

APPLICATION 1

Des nombres à chiffres distincts

Énoncé. Nombres de 3 chiffres distincts formés avec 1 à 7. Combien sont pairs ?

- ➊ Total : $A_7^3 = 210$.
- ➋ Unités paires : 3 choix (2, 4, 6).
- ➌ Puis $6 \times 5 = 30$: au total 90 nombres pairs.

APPLICATION 2

Deux groupes indiscernables

Énoncé. Répartir 10 personnes en deux groupes de 5.

- 1 Choisir le premier groupe : $\binom{10}{5} = 252$.
- 2 Mais les deux groupes ne sont pas distingués.
- 3 Il faut diviser par 2 : la réponse est 126.

L'essentiel de la leçon

Formule	Quand
n^p	avec répétition, ordonné
A_n^p	sans répétition, ordonné
$\binom{n}{p}$	sans ordre
$\frac{n!}{n_1!n_2!}$	anagrammes
2^n	nombre de parties