



Logique mathématique — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Logique

Série 2 — équivalences, quantificateurs imbriqués et récurrences fortes.

Exercice 1

Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que $P \Leftrightarrow Q$ équivaut à $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Correction

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	et	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes coïncident.

Exercice 2

Écrire la négation de $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) (|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Correction

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N) (|u_n - \ell| \geq \varepsilon)$.

Exercice 3

Soient a et b deux réels. Montrer que $(a^2 + b^2 = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$.

Correction

$\Leftarrow$ est immédiat. $\Rightarrow$: $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$; une somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement si chacun l'est, donc $a^2 = b^2 = 0$, soit $a = b = 0$.

Exercice 4

Montrer par l'absurde que, si n^2 est divisible par 2, alors n l'est aussi — puis généraliser à un nombre premier p .

Correction

Si n était impair, $n = 2k + 1$ et $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ serait impair : contradiction. Plus généralement, si p est premier et $p \mid n^2$, alors $p \mid n$ (lemme d'Euclide).

Exercice 5

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

Correction

Initialisation. $n = 4$: $16 \geq 16$ ✓. **Hérédité.** Supposons $2^n \geq n^2$ avec $n \geq 4$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Il reste à voir que $2n^2 \geq (n+1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, vraie pour $n \geq 3$. **Conclusion.** L'inégalité est vraie pour tout $n \geq 4$.

Exercice 6

Montrer que, pour tous réels a et b , $|a + b| \leq |a| + |b|$, puis étudier le cas d'égalité.

Correction

En élevant au carré : $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$ équivaut à $2ab \leq 2|ab|$, toujours vraie. L'égalité a lieu si et seulement si $ab \geq 0$, c'est-à-dire si a et b sont de **même signe**.

Exercice 7

Soit $P(n)$: « $n^2 + n + 41$ est premier ». Vérifier $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, puis montrer que $P(40)$ est fausse. Que conclure ?

Correction

41, 43, 47 sont premiers. Pour $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41$, qui n'est pas premier. Des exemples, même nombreux, ne démontrent **jamais** une proposition universelle.