

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 13

Vecteurs et géométrie analytique de l'espace

Coordonnées · Coplanarité · Droites et plans

Ce que nous allons apprendre

- Vecteurs et repère de l'espace
- Norme, milieu, distance
- Colinéarité et alignement
- Coplanarité et base
- Représentation paramétrique d'une droite
- Représentation paramétrique d'un plan

Trois coordonnées

Objet	Formule
$\vec{AB}$	$(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$
Norme (orthonormé)	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Milieu	moyennes des trois coordonnées
$k\vec{u}$	$(kx ; ky ; kz)$

EXEMPLE

$A(1 ; -1 ; 0)$ et $B(4 ; 1 ; 6)$: $\vec{AB}(3 ; 2 ; 6)$ et $AB = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$.

Et alignement

CRITÈRE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff$ il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$: coordonnées **proportionnelles**.

Exemple. $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(3 ; 0 ; 2)$, $C(-1 ; 4 ; -4)$.

- ❶ $\vec{AB}(2 ; -2 ; 3)$ et $\vec{AC}(-2 ; 2 ; -3)$.
- ❷ $\vec{AC} = -\vec{AB}$: les points sont **alignés**.

Un système à vérifier

CRITÈRE

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff$ il existe a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

- 1 Le système a **trois** équations pour deux inconnues.
- 2 Je détermine a et b avec deux équations.
- 3 Je **vérifie** la troisième : c'est elle qui décide.

Coplanaires ou non ?

Énoncé. $\vec{u}(1; -1; 2)$, $\vec{v}(2; 1; -1)$, $\vec{w}(4; -1; 3)$.

- ➊ $a + 2b = 4$ et $-a + b = -1$.
- ➋ En additionnant : $3b = 3$, donc $b = 1$ et $a = 2$.
- ➌ Vérification : $2 \times 2 - 1 = 3 \checkmark$ — les vecteurs sont **coplanaires**.

Trois vecteurs non coplanaires

THÉORÈME

Si $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ne sont pas coplanaires, tout vecteur s'écrit de façon **unique** $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

REPÈRE DU CUBE

Dans $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$: $C(1; 1; 0)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et le centre $\Omega(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Représentation paramétrique

FORME

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Appartenance. $M(4; -3; 5)$ et la droite $x = 2 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = -3 + 4t$.

- ❶ $2 + t = 4$ donne $t = 2$.
- ❷ Alors $y = -3$ ✓ et $z = 5$ ✓ : le point appartient à la droite.

Deux paramètres

FORME

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha s + \alpha' t \\ y = y_A + \beta s + \beta' t \\ z = z_A + \gamma s + \gamma' t \end{cases}$$

Exemple. $A(1; 0; 2)$, $\vec{u}(1; 1; 0)$, $\vec{v}(0; 1; 1)$.

1 $x = 1 + s$, $y = s + t$, $z = 2 + t$.

CONDITION

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne doivent pas être colinéaires.

Définissent-ils un plan ?

CRITÈRE

Trois points définissent un plan si et seulement s'ils ne sont **pas alignés**.

Exemple. $A(2; 0; 1)$, $B(0; 3; 1)$, $C(2; 3; 4)$.

- ➊ $\vec{AB}(-2; 3; 0)$ et $\vec{AC}(0; 3; 3)$.
- ➋ Ils ne sont pas proportionnels : les points définissent bien un plan.

APPLICATION 1

Les diagonales d'un cube

Énoncé. Montrer que (AG) et (BH) sont sécantes.

- 1 Dans le repère du cube, $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$.
- 2 Le milieu de $[AG]$ est $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, celui de $[BH]$ aussi.
- 3 Les deux diagonales passent par ce point : elles sont **sécantes**.

APPLICATION 2

La grande diagonale

Énoncé. Cube d'arête a : calculer AG .

- ➊ Dans le repère du cube, G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.
- ➋ $AG = a\sqrt{1 + 1 + 1}$.
- ➌ $AG = a\sqrt{3}$.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Distance	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Alignement	vecteurs colinéaires
Coplanarité	système + vérification
Droite	un paramètre
Plan	deux paramètres