

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 12

Rotation

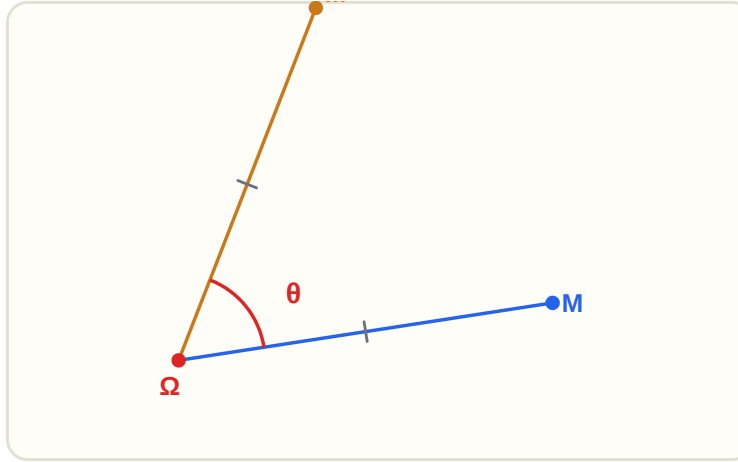
Écriture complexe des coordonnées · Compositions

Ce que nous allons apprendre

- Définition et caractérisation
- Les formules en coordonnées
- Rotation de centre quelconque
- Propriétés conservées
- Composition de rotations
- Utiliser une rotation en démonstration

1 · DÉFINITION

Centre et angle



DÉFINITION

$R(M) = M'$ avec $OM' = OM$ et $(\vec{OM}; \vec{OM'}) = \theta$; le centre O est le **seul** point invariant.

Les formules générales

CENTRE O , ANGLE θ

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Angle	Image de $(x; y)$
$\frac{\pi}{2}$	$(-y; x)$
π	$(-x; -y)$
$-\frac{\pi}{2}$	$(y; -x)$

Angle $\frac{\pi}{3}$

Énoncé. Image de $A(2; 1)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 $x' = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 $y' = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$.

Passer par les vecteurs

MÉTHODE

Je calcule $I\vec{M}$, j'applique la rotation à ce vecteur, puis j'ajoute les coordonnées de I .

Exemple. Centre $I(1; 2)$, angle π , point $A(4; -1)$.

- ❶ L'angle π donne la **symétrie centrale** de centre I .
- ❷ $A'(2 \times 1 - 4; 2 \times 2 + 1) = (-2; 5)$.

Une isométrie directe

Élément	Conservé ?
Longueurs	oui
Angles	oui
Aires	oui
Orientation	oui
Direction d'une droite	non (sauf $\theta = 0$ ou π)

Même centre : angles additionnés

THÉORÈME

$$R_{O,\beta} \circ R_{O,\alpha} = R_{O,\alpha+\beta}.$$

Cas	Résultat
$\alpha + \beta = \pi$	symétrie centrale
$\alpha + \beta = 2k\pi$	identité
$R_{O,-\alpha}$	réciproque de $R_{O,\alpha}$

EXEMPLE

Il faut composer **12** fois la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ pour retrouver l'identité.

Des rotations naturelles

PROPRIÉTÉ

Dans un polygone régulier à n côtés de centre O , la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ envoie chaque sommet sur le suivant.

Exemple. Triangle équilatéral direct ABC de centre O .

- 1 Angle $\frac{2\pi}{3}$: $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$.
- 2 Angle $\frac{4\pi}{3}$: $A \mapsto C, B \mapsto A, C \mapsto B$.

La rotation comme argument

PRINCIPE

Si une rotation envoie $[EC]$ sur $[BG]$, alors $EC = BG$: une isométrie conserve les longueurs.

OÙ LA CHERCHER

Un **centre** où deux longueurs égales se rencontrent, et un **angle** commun aux deux figures.

APPLICATION 1

Deux carrés

Énoncé. Sur $[AB]$ et $[AC]$ on construit extérieurement les carrés $ABDE$ et $ACFG$. Montrer que $BG = CE$.

- 1 La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie E sur B .
- 2 Elle envoie aussi C sur G .
- 3 Elle conserve les distances : $EC = BG$.

APPLICATION 2

Un hexagone

Énoncé. $ABCDEF$ hexagone régulier direct de centre O . Image de A par la rotation d'angle π ?

- ➊ L'angle élémentaire est $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
- ➋ $\pi = 3 \times \frac{\pi}{3}$: on avance de trois sommets.
- ➌ L'image de A est D , le sommet diamétralement opposé.

L'essentiel de la leçon

Point clé	Formule
Coordonnées	$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$
Centre quelconque	travailler sur $I\vec{M}$
$\theta = \pi$	symétrie centrale
Composition	angles additionnés
Polygone régulier	angle $\frac{2\pi}{n}$