



Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Série 2 — divisibilité, Bézout, Gauss et congruences.

Exercice 1

Déterminer le PGCD de 1 071 et 462 par l'algorithme d'Euclide, puis écrire une relation de Bézout.

Correction

$1\,071 = 2 \times 462 + 147$; $462 = 3 \times 147 + 21$; $147 = 7 \times 21$. Le PGCD est 21. Remontée :
 $21 = 462 - 3 \times 147 = 462 - 3(1\,071 - 2 \times 462) = 7 \times 462 - 3 \times 1\,071$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x \equiv 3 \pmod{7}$.

Correction

$5 \times 3 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$: l'inverse de 5 est 3. Donc $x \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$:
 $x = 2 + 7k, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7.

Correction

$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, et $100 = 3 \times 33 + 1$. Donc
 $2^{100} = (2^3)^{33} \times 2 \equiv 1^{33} \times 2 = 2 \pmod{7}$: le reste est 2.

Exercice 4

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Correction

Parmi trois entiers consécutifs, au moins un est pair et exactement un est multiple de 3. Le produit est donc divisible par 2 et par 3, qui sont premiers entre eux, donc par 6.

Exercice 5

Soient a et b premiers entre eux. Montrer que, si $a \mid bc$, alors $a \mid c$ (théorème de Gauss).

Correction

D'après Bézout, il existe u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c : $acu + bcv = c$. a divise acu et divise bcv (car $a \mid bc$), donc $a \mid c$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 5y = 1$.

Correction

Une solution particulière : $x = 3, y = -4$ (car $21 - 20 = 1$). Les solutions générales sont $x = 3 + 5k$ et $y = -4 - 7k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7

Déterminer le chiffre des unités de 3^{2024} .

Correction

Les unités de 3^n suivent le cycle 3, 9, 7, 1 de période 4. $2024 = 4 \times 506$, donc le chiffre des unités est celui de 3^4 , c'est-à-dire 1.