

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 10

Étude des fonctions

Concavité · Inflexion · Branches infinies

Ce que nous allons apprendre

- Le plan complet d'une étude
- Branches infinies et asymptotes
- Position par rapport à l'asymptote
- Concavité et points d'inflexion
- Position par rapport à une tangente
- Nombre de solutions d'une équation

Sept étapes

Étape	Contenu
1	domaine
2	parité, périodicité
3	limites aux bornes
4	dérivée et signe
5	tableau de variations
6	branches infinies
7	concavité et tracé

Que faire en $\pm\infty$?

Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers...	Alors...
0	branche parabolique de direction (Ox)
$\pm\infty$	branche parabolique de direction (Oy)
a fini non nul	chercher $\lim (f(x) - ax)$

SUITE

Si $f(x) - ax \rightarrow b$, la droite $y = ax + b$ est **asymptote oblique**.

3 · UN QUOTIENT

Étude de $\frac{x^2-3x+2}{x-3}$

- 1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; en $3^- : -\infty$, en $3^+ : +\infty$.
- 2 Division : $f(x) = x + \frac{2}{x-3}$: asymptote oblique $y = x$.
- 3 $f'(x) = \frac{(x-3)^2 - 2}{(x-3)^2}$, qui s'annule en $3 \pm \sqrt{2}$.

4 · CONCAVITÉ

Le signe de f''

Signe de f''	Courbe
$f'' > 0$	convexe (tournée vers le haut)
$f'' < 0$	concave
f'' s'annule en changeant de signe	point d' inflexion

EXEMPLE

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x : g''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 : le point (1 ; 1) est un point d'inflexion.

Étudier une différence

Exemple. $f(x) = x^3$ et sa tangente en 0.

- 1 La tangente est $y = 0$.
- 2 $f(x) - 0 = x^3$: négatif avant 0, positif après.
- 3 La courbe **traverse** sa tangente : O est un point d'inflexion.

Lire le tableau

Énoncé. Combien de solutions pour $x^3 - 3x + 1 = 0$?

- ➊ $f'(x) = 3(x^2 - 1)$: extremums en ± 1 .
- ➋ $f(-1) = 3 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$.
- ➌ La courbe traverse l'axe sur chacune des trois branches : **trois** solutions.

Existence, unicité, encadrement

THÉORÈME

f continue et strictement monotone sur $[a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ a une **unique** solution dans $]a; b[$.

Exemple. $x^3 + 2x - 5 = 0$.

- ❶ $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$; $f(1) = -2$ et $f(2) = 7$.
- ❷ $f(1,5) = 1,375 > 0$, donc $\alpha \in]1; 1,5[$.

APPLICATION 1

Une fonction impaire

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- ❶ $f(-x) = -f(x)$: impaire, étude sur $]0 ; +\infty[$.
- ❷ $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$: minimum $f(1) = 2$.
- ❸ $f(x) - x = \frac{1}{x} \rightarrow 0$: asymptote oblique $y = x$.

APPLICATION 2

Extremums d'un quotient

Énoncé. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- 1 $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- 2 Positive sur $] -1 ; 1[$, négative ailleurs.
- 3 Minimum $-\frac{1}{2}$ en -1 , maximum $\frac{1}{2}$ en 1 .

L'essentiel de la leçon

Notion	Outil
Branche infinie	étudier $\frac{f(x)}{x}$
Asymptote oblique	division euclidienne
Position / asymptote	signe du reste
Inflexion	f'' change de signe
Unicité d'une racine	TVI + monotonie