



Étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Étude des fonctions

Série 2 — études complètes, branches infinies et points d'inflexion.

Exercice 1

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$.

1. Déterminer D_f et les limites aux bornes.
2. Montrer que la droite $y = x$ est asymptote oblique.

Correction

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; en 3^- : $-\infty$; en 3^+ : $+\infty$; $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
2. La division donne $f(x) = x + \frac{2}{x-3}$, et $\frac{2}{x-3} \rightarrow 0$: la droite $y = x$ est asymptote oblique.

Exercice 2

Pour la fonction précédente, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

Correction

$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 2}{(x-3)^2}$. Le numérateur s'annule pour $x = 3 \pm \sqrt{2}$: f' est positive à l'extérieur de $\left[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\right]$ et négative à l'intérieur (hors de $x = 3$).

Exercice 3

Soit $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $(1; 1)$ est un point d'inflexion.

Correction

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$: g est croissante (avec une tangente horizontale en 1). $g''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 en changeant de signe : le point $(1; 1)$ est un **point d'inflexion**.

Exercice 4

Étudier la position de la courbe de $f(x) = x^3$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Correction

La tangente est l'axe des abscisses ($y = 0$). Or $x^3 \geq 0$ pour $x \geq 0$ et ≤ 0 pour $x \leq 0$: la courbe **traverse** la tangente en O , qui est donc un point d'inflexion.

Exercice 5

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

1. Déterminer D_f .
2. Étudier la parité et les variations sur $[2; +\infty[$.

Correction

1. $x^2 - 4 \geq 0 : D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.
2. $f(-x) = f(x)$: la fonction est **paire**. Sur $]2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0$: elle est croissante.

Exercice 6

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles.

Correction

$f'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en ± 1 ; $f(-1) = 3 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. La fonction croît de $-\infty$ à 3, décroît de 3 à -1 , puis croît de -1 à $+\infty$: elle traverse l'axe **trois** fois.

Exercice 7

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Étudier les variations de f et déterminer ses extremums.

Correction

$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. f' est négative hors de $[-1; 1]$, positive à l'intérieur : minimum $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et maximum $f(1) = \frac{1}{2}$.