

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 9

Dérivation

Dérivabilité · Composées · Optimisation

Ce que nous allons apprendre

- Dérivabilité en un point
- Points anguleux et tangentes verticales
- Les formules de dérivation
- Dérivée d'une composée
- Tangentes passant par un point
- Problèmes d'optimisation

Une limite finie

DÉFINITION

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

à condition que cette limite existe et soit **finie**.

Situation	Interprétation
Limites à gauche et à droite différentes	point anguleux
Limite infinie	tangente verticale

Continue mais pas dérivable

Exemple 1. $f(x) = |x|$ en 0.

1 À droite le taux vaut 1, à gauche -1 : **point anguleux**.

Exemple 2. $g(x) = \sqrt{x}$ en 0.

2 $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$: **tangente verticale**.

CONCLUSION

La continuité n'entraîne **pas** la dérivabilité.

Usuelles et opérations

Expression	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u / \cos u$	$u' \cos u / -u' \sin u$

Trois calculs

- ❶ $(3x^2 - 1)^5$ a pour dérivée $30x(3x^2 - 1)^4$.
- ❷ $\sqrt{4x + 5}$ a pour dérivée $\frac{2}{\sqrt{4x + 5}}$.
- ❸ $\sin^3(2x)$ a pour dérivée $6 \sin^2(2x) \cos(2x)$.

ERREUR CLASSIQUE

Oublier le facteur u' : c'est la faute la plus fréquente.

Combiner les règles

Énoncé. Dériver $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $]0; +\infty[$.

❶ $u = \sqrt{x}, u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ; v = x + 1, v' = 1.$

❷ $f'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}.$

❸ $= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$

Passant par un point donné

MÉTHODE

L'abscisse a du point de contact est l'**inconnue** : j'écris la tangente en a et j'impose qu'elle passe par le point voulu.

Exemple. Tangentes à $y = x^2$ passant par $A(0; -1)$.

- ❶ Tangente en a : $y = 2ax - a^2$.
- ❷ Elle passe par A si $-1 = -a^2$, soit $a = \pm 1$.
- ❸ $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Du signe à l'unicité

Énoncé. $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

- ➊ $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: strictement croissante.
- ➋ $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$.
- ➌ L'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]0 ; 1[$.

La méthode en quatre temps

- 1 Je choisis une variable et j'écris la quantité à optimiser.
- 2 Je précise l'intervalle d'étude.
- 3 Je dérive, j'étudie le signe, je conclus.

EXEMPLE

Périmètre 20 cm : $A(x) = x(10 - x)$, maximale pour $x = 5$ — c'est le **carré**, d'aire 25 cm².

APPLICATION 1

Tangente parallèle

Énoncé. Où la tangente à $f(x) = x^3 - 12x$ est-elle parallèle à $y = 15x$?

- ➊ $f'(x) = 3x^2 - 12$.
- ➋ $3x^2 - 12 = 15$ donne $x^2 = 9$.
- ➌ Les points sont $(3; -9)$ et $(-3; 9)$.

APPLICATION 2

Un tableau de variations

Énoncé. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- ➊ $f'(x) = 3x(x - 2)$.
- ➋ Positive hors de $[0 ; 2]$, négative entre.
- ➌ Maximum local $f(0) = 4$, minimum local $f(2) = 0$.

L'essentiel de la leçon

Point clé	Ce que je retiens
Dérivabilité	limite finie du taux
$ x $ en 0	continue, non dérivable
Composée	ne jamais oublier u'
Tangente par un point	a est l'inconnue
Optimisation	variable, intervalle, dérivée