



Dérivation — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Dérivation

Série 2 — dérivabilité, composées et applications.

Exercice 1

Étudier la dérivabilité de $f(x) = |x|$ en 0.

Correction

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$. Les deux limites diffèrent : f n'est **pas dérivable** en 0 (point anguleux).

Exercice 2

Étudier la dérivabilité de $g(x) = \sqrt{x}$ en 0.

Correction

$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty$: g n'est pas dérivable en 0 ; la courbe y admet une **tangente verticale**.

Exercice 3

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ sur $]0; +\infty[$.

Correction

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Exercice 4

Calculer la dérivée de $h(x) = \sin^3(2x)$.

Correction

$$h'(x) = 3 \sin^2(2x) \times 2 \cos(2x) = 6 \sin^2(2x) \cos(2x).$$

Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution.

Correction

$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: f est strictement croissante. Elle est continue, avec $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$: l'équation admet une **unique** solution dans $]0; 1[$.

Exercice 6

Déterminer les tangentes à la courbe de $f(x) = x^2$ passant par le point $A(0; -1)$.

Correction

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Elle passe par A si $-1 = -a^2$, soit $a = \pm 1$. Les tangentes sont $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Exercice 7

Parmi tous les rectangles de périmètre 20 cm, déterminer celui d'aire maximale.

Correction

Soit x la largeur : la longueur vaut $10 - x$ et l'aire $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$ pour $x \in]0; 10[$. $A'(x) = 10 - 2x$ s'annule en $x = 5$ en changeant de signe : l'aire maximale est 25 cm^2 , obtenue pour le **carré** de côté 5 cm.