

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 8

Limite d'une fonction

Indéterminations · Gendarmes · Asymptotes

Ce que nous allons apprendre

- Les quatre formes indéterminées
- Factorisations et conjugués
- Le signe de $\sqrt{x^2}$ en $-\infty$
- Les limites trigonométriques
- Le théorème des gendarmes
- Asymptotes et branches infinies

Quatre formes, quatre outils

Forme	Technique
$\frac{\infty}{\infty}$	terme de plus haut degré
$\frac{0}{0}$	factoriser (racine évidente)
$\infty - \infty$	conjugué
$0 \times \infty$	réécrire en quotient

IDENTITÉ CLÉ

$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$: très utile en forme $\frac{0}{0}$.

Deux usages

Exemple 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$

1 $\frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$

Exemple 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right).$

2 $\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x}} \rightarrow \frac{2}{1 + 1} = 1.$

3 · ATTENTION AU SIGNE

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

RÈGLE

En $+\infty$: $\sqrt{x^2 + 1} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. En $-\infty$: $\sqrt{x^2 + 1} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

Conséquence.

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1.$
- 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1.$

Les limites de référence

À CONNAÎTRE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

1 $\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}.$

2 Le quotient vaut $\frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{2}.$

Encadrer pour conclure

THÉORÈME

Si $g \leq f \leq h$ au voisinage considéré et si g et h ont la **même** limite ℓ , alors f tend vers ℓ .

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

- 1 Pour $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.
- 2 Les deux bornes tendent vers 0 : la limite vaut 0.

Trois types

Type	Condition
Verticale $x = a$	limite infinie en a
Horizontale $y = \ell$	limite finie en $\pm\infty$
Oblique $y = ax + b$	$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$

POSITION RELATIVE

Le **signe** de $f(x) - (ax + b)$ indique si la courbe est au-dessus ou en dessous de l'asymptote.

Asymptote oblique

Énoncé. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2}$.

- 1 La division donne $f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{x + 2}$.
- 2 $\frac{5}{x + 2} \rightarrow 0$: la droite $y = 2x - 3$ est asymptote oblique.
- 3 En $+\infty$, le reste est positif : la courbe est **au-dessus**.

APPLICATION 1

Trois calculs

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x}{2x^3 + 5} = \frac{3}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim(x^2 + 2x + 4) = 12.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2.$$

APPLICATION 2

Une simplification

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Limite en 1 ?

- 1 $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.
- 2 Pour $x \neq 1$: $f(x) = x + 3$.
- 3 La limite vaut 4 : la courbe est la droite $y = x + 3$ **privée** d'un point.

L'essentiel de la leçon

Piège	Réflexe
$\frac{0}{0}$	factoriser
Racines	conjugué
$-\infty$ et $\sqrt{x^2}$	$\sqrt{x^2} = -x$
$\frac{\sin(ax)}{bx}$	faire apparaître $\frac{\sin u}{u}$
Fonction bornée $\times$ tendant vers 0	gendarmes