

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 7

Suites numériques

Réurrence · Encadrements · Suites auxiliaires

Ce que nous allons apprendre

- Modes de définition et monotonie
- Suites arithmétiques et géométriques
- Sommes classiques
- Suites arithmético-géométriques
- Encadrements par récurrence
- Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Reconnaître la structure

Type	Relation	Terme général
Arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_0 + nr$
Géométrique	$u_{n+1} = qu_n$	$u_0 q^n$
Arithmético-géométrique	$u_{n+1} = au_n + b$	via $v_n = u_n - \ell$

POINT FIXE

ℓ est la solution de $\ell = a\ell + b$; alors (v_n) est géométrique de raison a .

Un exemple complet

Énoncé. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

1 Point fixe : $\ell = \frac{\ell + 3}{2}$ donne $\ell = 3$.

2 $v_n = u_n - 3$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, avec $v_0 = -1$.

3 $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par récurrence

Énoncé. Montrer que $2 \leq u_n \leq 3$ pour la suite précédente.

- ➊ **Initialisation** : $u_0 = 2$ ✓.
- ➋ Si $2 \leq u_n \leq 3$, alors $5 \leq u_n + 3 \leq 6$.
- ➌ Donc $2,5 \leq u_{n+1} \leq 3$: l'encadrement est conservé.

Trois techniques

Technique	Conclusion
Signe de $u_{n+1} - u_n$	directe
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ comparé à 1	pour les termes positifs
Fonction associée $u_n = f(n)$	variations de f sur $[0; +\infty[$

EXEMPLE

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n}{2} \geq 0 \text{ car } u_n \leq 3 : \text{la suite est croissante.}$$

Les formules à connaître

Somme	Valeur
Arithmétique	$\frac{nb \times (1er + dernier)}{2}$
Géométrique	$u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
$\sum_{k=0}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=0}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=0}^n k^3$	$\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Une somme de cubes

Énoncé. Montrer que $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

- 1 $n = 0$: les deux membres valent 0.
- 2 On ajoute $(n+1)^3$: $(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right)$.
- 3 $= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}$, la formule au rang $n+1$.

7 · SUITES IMPLICITES

$$\underline{u_{n+1}} = f(u_n)$$

MÉTHODE

Je montre d'abord un **encadrement stable** par récurrence, puis j'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ sur cet intervalle.

Exemple. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

- ❶ Si $1 \leq u_n \leq 2$, alors $3 \leq u_n + 2 \leq 4$.
- ❷ Donc $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$, et $\sqrt{3} > 1$: l'encadrement tient.

APPLICATION 1

Une somme géométrique

Énoncé. Calculer $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$.

➊ Raison $\frac{1}{2}$, premier terme 1, 11 termes.

➋
$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2048}\right).$$

➌
$$S = \frac{2047}{1024}.$$

APPLICATION 2

Croissante et majorée

Énoncé. $u_n = \frac{2n - 1}{n + 3}$.

1 $u_n = 2 - \frac{7}{n + 3}$.

2 La quantité retranchée décroît : la suite **croît**.

3 Et $u_n < 2$: la suite est majorée par 2.

L'essentiel de la leçon

Situation	Outil
$u_{n+1} = au_n + b$	point fixe + suite auxiliaire
Encadrement	réurrence sur l'intervalle
Monotonie	signe de $u_{n+1} - u_n$
Sommes	formules classiques
Expression $a - \frac{b}{n+c}$	croissante et majorée