



Suites numériques — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Suites numériques

Série 2 — majorations, convergence et suites auxiliaires.

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

1. Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Correction

1. $u_0 = 2$ convient. Si $2 \leq u_n \leq 3$, alors $5 \leq u_n + 3 \leq 6$, donc $2,5 \leq u_{n+1} \leq 3$: l'encadrement est conservé.
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n}{2} \geq 0$ car $u_n \leq 3$: la suite est **croissante**.

Exercice 2

Pour la suite précédente, on pose $v_n = u_n - 3$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire u_n .

Correction

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2} - 3 = \frac{u_n - 3}{2} = \frac{1}{2}v_n : \text{géométrique de raison } \frac{1}{2}, \text{ avec } v_0 = -1. \text{ Donc}$$
$$v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 3

Soit $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 2.

Correction

$$u_n = 2 - \frac{7}{n+3} : \text{la quantité retranchée décroît, donc } (u_n) \text{ **croît** ; de plus } u_n < 2.$$

Exercice 4

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Correction

Initialisation. $n = 0 : 0 = 0$. **Hérédité.**

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}, \text{ qui est bien } \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Exercice 5

(u_n) est arithmétique de raison r et (v_n) géométrique de raison q . Que vaut $u_{n+1} - u_n$? Et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$? Donner un exemple de suite ni arithmétique ni géométrique.

Correction

$u_{n+1} - u_n = r$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$. La suite $w_n = n^2$ n'est ni arithmétique ($w_1 - w_0 = 1$ mais $w_2 - w_1 = 3$) ni géométrique.

Exercice 6

Calculer $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$.

Correction

Somme géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 11 termes :

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2048}\right) = \frac{2047}{1024}.$$

Exercice 7

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$.

Correction

$u_0 = 1$ convient. Si $1 \leq u_n \leq 2$, alors $3 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$, et $\sqrt{3} > 1$: l'encadrement est conservé.