

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 6

Calcul trigonométrique

Transformations · Équations · Inéquations

Ce que nous allons apprendre

- Addition, duplication, triplification
- Linéarisation et factorisation
- Somme en produit et produit en somme
- La forme $a \cos x + b \sin x$
- Équations trigonométriques
- Inéquations sur le cercle

Addition et duplication

ADDITION

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

DUPLICATION

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

Démontrer une identité

Énoncé. Montrer que $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

- 1 $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$.
- 2 $= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$.
- 3 Avec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$: $3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

DE MÊME

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

3 · DEMI-ANGLE

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$

1 $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2 $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$

3 $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ (positif dans le premier quadrant).

Passer de l'un à l'autre

Transformation	Formule
$\cos p + \cos q$	$2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q$	$2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\cos a \cos b$	$\frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
$\sin a \sin b$	$\frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

CONSÉQUENCE

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a + b}{2}.$$

5 · FORME RÉDUITE

$$a \cos x + b \sin x$$

MÉTHODE

On factorise par $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour obtenir $r \cos(x - \varphi)$.

Exemple. Résoudre $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

❶ $r = 2$ et l'expression vaut $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

❷ $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

❸ $x = 0$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ sur $[0 ; 2\pi[$.

Les formes de référence

Équation	Solutions
$\cos x = \cos a$	$x = \pm a + 2k\pi$
$\sin x = \sin a$	$a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$
$\tan x = \tan a$	$x = a + k\pi$

SECOND DEGRÉ

On pose $X = \cos x$ (avec $-1 \leq X \leq 1$), on résout, puis on revient à x .

Raisonner sur le cercle

Exemple. Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi[$.

1 $\cos x = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

2 Le cosinus dépasse $\frac{1}{2}$ autour de 0.

3 $S = \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right[$.

APPLICATION 1

Une valeur exacte

Énoncé. Calculer $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

1 Produit en somme : $\frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} \right]$.

2 $= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + 0 \right]$.

3 $= \frac{1}{4}$.

APPLICATION 2

Une équation du second degré

Énoncé. Résoudre $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$.

❶ $X = \cos x : 2X^2 + X - 1 = 0.$

❷ $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1.$

❸ $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} ; \pi ; \frac{5\pi}{3} \right\}.$

L'essentiel de la leçon

Outil	Formule
Duplication	$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$
Triplication	$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
Somme en produit	$2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
Forme réduite	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Inéquation	lecture sur le cercle