

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 5

# Produit scalaire et cercle

---

Puissance d'un point · Tangentes · Lieux

# Ce que nous allons apprendre

---

- Les expressions du produit scalaire
- Le produit scalaire dans un triangle
- Équation d'un cercle
- Puissance d'un point
- Intersection droite-cercle et tangentes
- Lieux géométriques

## Quatre façons de calculer

| Donnée          | Formule                                                  |
|-----------------|----------------------------------------------------------|
| Coordonnées     | $xx' + yy'$                                              |
| Normes et angle | $\ \vec{u}\  \ \vec{v}\  \cos \theta$                    |
| Trois longueurs | $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$ |
| Projection      | $\overline{AB} \times \overline{AH}$                     |

### EXEMPLE

$$AB = 7, AC = 9, BC = 8 \text{ donnent } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{49 + 81 - 64}{2} = 33.$$

# Signe et mesure

## FORMULE

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

**Exemple.**  $\vec{u}(2; -3)$  et  $\vec{v}(4; 1)$ .

- ❶  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 - 3 = 5.$
- ❷  $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}, \|\vec{v}\| = \sqrt{17}.$
- ❸  $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{221}} \approx 0,336, \text{ soit } \theta \approx 70,3^\circ.$

## De l'équation développée au centre

**Exemple.**  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ .

- ➊ Je complète les carrés :  $(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 - 15 = 0$ .
- ➋  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ .
- ➌ Centre  $\Omega(3 ; -1)$ , rayon 5.

## Intérieur, sur, extérieur

### DÉFINITION

$$\mathcal{P}(A) = \Omega A^2 - R^2$$

| Signe                | Position de $A$ |
|----------------------|-----------------|
| $\mathcal{P}(A) > 0$ | extérieur       |
| $\mathcal{P}(A) = 0$ | sur le cercle   |
| $\mathcal{P}(A) < 0$ | intérieur       |

## Intersection par substitution

**Exemple.**  $x^2 + y^2 = 25$  et  $y = x + 1$ .

- ❶  $x^2 + (x + 1)^2 = 25$ , soit  $2x^2 + 2x - 24 = 0$ .
- ❷  $x^2 + x - 12 = 0 : x = 3$  ou  $x = -4$ .
- ❸ Les points sont  $(3; 4)$  et  $(-4; -3)$ .

## Depuis un point extérieur

### CLÉ

Au point de contact  $T$ , le rayon  $\vec{OT}$  est **orthogonal** à la tangente :  
 $\vec{OT} \cdot \vec{AT} = 0$ .

**Exemple.** Cercle  $x^2 + y^2 = 9$  et  $A(5; 0)$ .

❶  $OA = 5$  et  $OT = 3$ , donc  $AT = 4$ .

❷  $x_T = \frac{OT^2}{OA} = \frac{9}{5}$  et  $y_T = \pm \frac{12}{5}$ .

## Cercles et droites

| Relation                      | Lieu de $M$                            |
|-------------------------------|----------------------------------------|
| $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ | cercle de diamètre $[AB]$              |
| $MA^2 + MB^2 = k$             | cercle centré au milieu                |
| $MA^2 - MB^2 = k$             | <b>droite</b> perpendiculaire à $(AB)$ |

### EXEMPLE

Avec  $A(0;0)$  et  $B(6;0)$  :  $MA^2 - MB^2 = 12x - 36$ , donc  $= 12$  donne la droite  $x = 4$ .

## APPLICATION 1

# Un triangle rectangle

Énoncé.  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(3; 6)$ .

- 1  $\vec{AB}(4; -2)$  et  $\vec{AC}(2; 4)$ .
- 2  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 - 8 = 0$ .
- 3 Le triangle est **rectangle en A**.

## APPLICATION 2

# Un cercle de diamètre

**Énoncé.** Lieu des  $M$  tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ , avec  $A(2; 1)$  et  $B(8; 9)$ .

- ➊ Le centre est le milieu  $\Omega(5; 5)$ .
- ➋  $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$ , donc  $R = 5$ .
- ➌  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

# L'essentiel de la leçon

| Objectif            | Outil                        |
|---------------------|------------------------------|
| Produit scalaire    | quatre expressions           |
| Centre et rayon     | compléter les carrés         |
| Position d'un point | puissance $\Omega A^2 - R^2$ |
| Tangente            | rayon orthogonal             |
| $MA^2 - MB^2 = k$   | une droite                   |