



Produit scalaire et cercle — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Produit scalaire

Série 2 — puissance d'un point, cercles et lieux. Le repère est orthonormé.

Exercice 1

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(4; 1)$, puis l'angle entre les deux vecteurs à $0,1^\circ$ près.

Correction

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 - 3 = 5; \|\vec{u}\| = \sqrt{13} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{17}. \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{221}} \approx 0,336, \text{ donc } \theta \approx 70,3^\circ.$$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, avec $A(2; 1)$ et $B(8; 9)$.

Correction

C'est le cercle de diamètre $[AB]$: centre $\Omega(5; 5)$ et rayon $\frac{AB}{2} = 5$. Équation :
 $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Exercice 3

Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 5, et $A(7; 3)$. Calculer la puissance de A par rapport à $(\mathcal{C})$.

Correction

$\mathcal{P}(A) = \Omega A^2 - R^2 = (25 + 16) - 25 = 16$. La puissance est positive : A est **extérieur** au cercle.

Exercice 4

Déterminer l'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = x + 1$.

Correction

$x^2 + (x + 1)^2 = 25$ donne $2x^2 + 2x - 24 = 0$, soit $x^2 + x - 12 = 0$: $x = 3$ ou $x = -4$.
Les points sont $(3; 4)$ et $(-4; -3)$.

Exercice 5

Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 9$ issues du point $A(5; 0)$ — on donnera les points de contact.

Correction

Un point de contact T vérifie $\vec{\Omega T} \cdot \vec{AT} = 0$ avec $\Omega = O$; de plus $OT = 3$. Comme $OA = 5$, on a $AT = \sqrt{25 - 9} = 4$, et T a pour abscisse $\frac{9}{5}$; alors $y_T^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25}$, soit $y_T = \pm \frac{12}{5}$. Les points de contact sont $\left(\frac{9}{5} ; \pm \frac{12}{5}\right)$.

Exercice 6

Dans un triangle, $AB = 7$, $AC = 9$ et $BC = 8$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

Correction

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{49 + 81 - 64}{2} = 33.$$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 12$, avec $A(0 ; 0)$ et $B(6 ; 0)$.

Correction

$MA^2 - MB^2 = x^2 + y^2 - [(x - 6)^2 + y^2] = 12x - 36$. L'égalité $12x - 36 = 12$ donne $x = 4$: c'est la **droite** d'équation $x = 4$, perpendiculaire à (AB) .