

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 4

Barycentre dans le plan

Associativité · Leibniz · Lieux géométriques

Ce que nous allons apprendre

- Définition et relation fondamentale
- Coordonnées et décomposition vectorielle
- Homogénéité et associativité
- Centre de gravité et médianes
- La relation de Leibniz
- Lieux géométriques

1 · DÉFINITION

Et sa relation maîtresse

DÉFINITION (SI $\sum \alpha_i \neq 0$)

$$\sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

RELATION FONDAMENTALE

$$\sum \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum \alpha_i \right) \vec{MG}$$

USAGE

Elle permet de **réduire** toute combinaison de vecteurs en un seul.

Construire G

Exemple. G barycentre de $\{(A; 1); (B; 2); (C; 3)\}$.

- ➊ En prenant $M = A$: $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = 6\vec{AG}$.
- ➋ $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.
- ➌ Je construis les deux vecteurs puis leur somme.

Regrouper des points

ÉNONCÉ

On peut remplacer un sous-groupe de points par leur barycentre partiel, affecté de la **somme** de leurs coefficients.

Suite de l'exemple. I barycentre de $\{(B; 2); (C; 3)\}$.

- ➊ G est alors le barycentre de $\{(A; 1); (I; 5)\}$.
- ➋ Donc $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{AI} : G \in (AI)$.
- ➌ C'est la méthode standard pour prouver un **alignement**.

Les médianes concourantes

DÉMONSTRATION

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ et $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$ (avec I milieu de $[BC]$).

- 1 Donc $\vec{GA} + 2\vec{GI} = \vec{0}$.
- 2 Soit $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$: G est sur la médiane issue de A .
- 3 Le même raisonnement vaut pour les deux autres : les médianes sont **concourantes** en G .

Transformer une somme de carrés

RELATION

$$\sum \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum \alpha_i \right) MG^2 + \sum \alpha_i GA_i^2$$

DÉMONSTRATION

On écrit $\vec{MA}_i = \vec{MG} + \vec{GA}_i$, on élève au carré, on somme : le double produit disparaît grâce à la définition de G .

Trois formes reconnaissables

Relation	Lieu
$\ \sum \alpha_i \vec{MA}_i\ = k$	cercle de centre G
$\sum \alpha_i MA_i^2 = k$	cercle de centre G (Leibniz)
$\ \vec{u}_M\ = \ \vec{v}_M\ $	médiatrice

EXEMPLE

$\|2\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 18$ devient $6MG = 18$, donc $MG = 3$.

Le barycentre sort du segment

REMARQUE

Si un coefficient est négatif (la somme restant non nulle), G se trouve à **l'extérieur** du segment.

Exemple. G barycentre de $\{(A; 3); (B; -1)\}$.

- ❶ Somme des coefficients : 2.
- ❷ $\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$: G est au-delà de A , du côté opposé à B .

APPLICATION 1

Un quadrilatère

Énoncé. I milieu de $[AB]$, J milieu de $[CD]$. Que vaut l'isobarycentre de A, B, C, D ?

- 1 Par associativité, G est le barycentre de $\{(I; 2); (J; 2)\}$.
- 2 Les deux coefficients sont égaux.
- 3 G est le **milieu** de $[IJ]$.

APPLICATION 2

Une médiatrice

Énoncé. Lieu des M tels que $\|3\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$.

- ➊ À gauche : G barycentre de $\{(A; 3); (B; -1)\}$, somme 2, donc $2MG$.
- ➋ À droite : I milieu de $[AB]$, donc $2MI$.
- ➌ $MG = MI$: c'est la **médiatrice** de $[GI]$.

L'essentiel de la leçon

Outil	Usage
Relation fondamentale	réduire une combinaison
Associativité	prouver un alignement
Leibniz	somme de carrés de distances
Coordonnées	moyenne pondérée
Lieux	cercle ou médiatrice