



## Barycentre — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Barycentre

Série 2 — barycentres partiels, alignements et lieux géométriques.

### Exercice 1

$ABC$  est un triangle.  $G$  est le barycentre de  $\{(A; 1); (B; 2); (C; 3)\}$ .

1. Exprimer  $\vec{AG}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
2. En déduire une construction de  $G$ .

#### Correction

1.  $\vec{AG} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{6}$ , soit  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ .
2. Je construis  $\frac{1}{3}\vec{AB}$  et  $\frac{1}{2}\vec{AC}$ , puis la somme par la règle du parallélogramme.

### Exercice 2

$I$  est le barycentre de  $\{(B; 2); (C; 3)\}$ . Montrer que  $G$  (exercice 1) appartient à la droite  $(AI)$  et préciser  $\frac{AG}{AI}$ .

#### Correction

Par associativité,  $G$  est le barycentre de  $\{(A; 1); (I; 5)\}$ , donc  $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{AI} : G \in (AI)$  et  $\frac{AG}{AI} = \frac{5}{6}$ .

### Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|3\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$ .

#### Correction

Soit  $G$  le barycentre de  $\{(A; 3); (B; -1)\}$  (somme 2) et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . L'égalité devient  $2MG = 2MI$ , soit  $MG = MI$  : c'est la **médiatrice** de  $[GI]$ .

### Exercice 4

$ABCD$  est un quadrilatère.  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  celui de  $[CD]$ . Montrer que le milieu de  $[IJ]$  est l'isobarycentre de  $A, B, C, D$ .

### Correction

Par associativité, l'isobarycentre  $G$  de  $\{(A; 1); (B; 1); (C; 1); (D; 1)\}$  est le barycentre de  $\{(I; 2); (J; 2)\}$ , c'est-à-dire le **milieu** de  $[IJ]$ .

### Exercice 5

Dans un repère,  $A(1; 3)$ ,  $B(-2; 1)$  et  $C(4; -2)$ . Calculer les coordonnées du barycentre de  $\{(A; 3); (B; 2); (C; 1)\}$ .

### Correction

$$x_G = \frac{3 - 4 + 4}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } y_G = \frac{9 + 2 - 2}{6} = \frac{3}{2} : G\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

### Exercice 6

Soit  $G$  le centre de gravité de  $ABC$ . Montrer que, pour tout point  $M$  :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

### Correction

$\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA}$ , et de même pour  $B$  et  $C$ . En élevant au carré et en sommant :

$$\sum MA^2 = 3MG^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + \sum GA^2$$

La somme entre parenthèses est nulle (définition de  $G$ ), d'où le résultat.

### Exercice 7

Déterminer  $\alpha$  pour que le barycentre de  $\{(A; \alpha); (B; 1); (C; 1)\}$  appartienne à la droite  $(BC)$ , avec  $ABC$  non aplati.

### Correction

Par associativité,  $G$  est le barycentre de  $\{(A; \alpha); (I; 2)\}$  où  $I$  est le milieu de  $[BC]$  : il est sur  $(AI)$ . Il appartient à  $(BC)$  si et seulement si  $G = I$ , c'est-à-dire  $\alpha = 0$ .