

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 3

Généralités sur les fonctions

Bornes · Périodicité · Bijection · Composition

Ce que nous allons apprendre

- Domaine et symétries
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- Périodicité
- Variations sans dérivée
- Bijection et réciproque
- Domaine d'une composée

Majorée, minorée, bornée

Notion	Définition
Majorée	$\exists M, \forall x, f(x) \leq M$
Minorée	$\exists m, \forall x, f(x) \geq m$
Bornée	majorée et minorée

MÉTHODE

Je pars d'une inégalité vraie, par exemple $(|x| - 1)^2 \geq 0$, et je la transforme.

Une fonction bornée

Énoncé. Montrer que $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$.

- ❶ $(|x| - 1)^2 \geq 0$ donne $x^2 + 1 \geq 2|x|$.
- ❷ En divisant par $x^2 + 1 > 0$: $\frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.
- ❸ Les bornes $\pm \frac{1}{2}$ sont atteintes en $x = \pm 1$.

Une translation horizontale

DÉFINITION

f est périodique de période $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x du domaine.

Exemple. $f(x) = \cos(3x)$: $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) = f(x)$, donc
$$T = \frac{2\pi}{3}.$$

RÈGLE

Pour $\cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$, la période est $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

Produits et composées

Combinaison	Résultat
paire $\times$ paire	paire
impaire $\times$ impaire	paire
paire $\times$ impaire	impaire
$f \circ g$ avec g paire	paire

PRÉALABLE

Le domaine doit être **symétrique** par rapport à 0.

Sans dérivée

Exemple. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$.

1 $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$.

2 $\frac{2}{x+1}$ est décroissante et positive sur $] -1 ; +\infty[$.

3 Son opposée est croissante, donc f est **croissante**.

Du théorème à la réciproque

THÉORÈME

Une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple. $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[1 ; +\infty[$.

- ❶ $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- ❷ $f([1 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$.
- ❸ $y = (x - 1)^2 - 1$ donne $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y + 1}$.

Le domaine d'abord

RÈGLE

$x \in D_{g \circ f}$ si $x \in D_f$ **et** $f(x) \in D_g$.

Exemple. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$.

- ❶ $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3}$: domaine $[3; +\infty[$.
- ❷ $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} - 3$: domaine $[0; +\infty[$.

Les réflexes de l'exercice

Question	Outil
Montrer que f est bornée	partir d'un carré positif
Trouver la période	$\frac{2\pi}{ \omega }$ pour $\cos(\omega x)$
Variations d'un quotient	décomposer en $\alpha + \frac{\beta}{\dots}$
Réciproque	résoudre $y = f(x)$ en x

APPLICATION 1

Un maximum

Énoncé. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- 1 $f(-x) = f(x)$: la fonction est **paire**.
- 2 $1+x^2 \geq 1$, donc $f(x) \leq 1$.
- 3 L'égalité a lieu en $x = 0$: le maximum vaut 1.

APPLICATION 2

Bijection et réciproque

Énoncé. $g(x) = x^2 + 4x + 1$ sur $[-2; +\infty[$.

- ➊ $g(x) = (x + 2)^2 - 3$: minimum -3 en $x = -2$.
- ➋ Strictement croissante : bijection de $[-2; +\infty[$ sur $[-3; +\infty[$.
- ➌ $g^{-1}(y) = -2 + \sqrt{y + 3}$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Point clé
Bornée	partir d'une inégalité vraie
Période de $\cos(\omega x)$	$\frac{2\pi}{ \omega }$
Parité d'un produit	règle des signes
Bijection	continue + strictement monotone
$D_{g \circ f}$	$x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$