



Généralités sur les fonctions — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Généralités sur les fonctions

Série 2 — majorations, périodicité, composition et bijections.

Exercice 1

Montrer que $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et préciser ses bornes.

Correction

$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$ car $x^2 + 1 \geq 2|x|$ (conséquence de $(|x| - 1)^2 \geq 0$). Les valeurs $\pm \frac{1}{2}$ sont atteintes en $x = \pm 1$: ce sont le maximum et le minimum.

Exercice 2

Soit $f(x) = \cos(3x)$. Montrer que f est périodique et déterminer sa plus petite période positive.

Correction

$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x)$: la période est $T = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3

Étudier les variations de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$ sans utiliser la dérivée.

Correction

$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$. Sur $] -1 ; +\infty[$, $\frac{2}{x+1}$ est décroissante, donc son opposée est croissante : f est **croissante**.

Exercice 4

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[1 ; +\infty[$. Montrer que f est bijective de $[1 ; +\infty[$ vers $[-1 ; +\infty[$ et déterminer f^{-1} .

Correction

$f(x) = (x-1)^2 - 1$ est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(1) = -1$ et limite $+\infty$: elle est bijective. $y = (x-1)^2 - 1$ donne $x = 1 + \sqrt{y+1}$, donc $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+1}$.

Exercice 5

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$. Déterminer les domaines de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Correction

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x-3} : \text{domaine } [3; +\infty[. \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x} - 3 : \text{domaine } [0; +\infty[.$$

Exercice 6

Soit f impaire et g paire, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $f \times g$ et de $f \circ g$.

Correction

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) : \text{le produit est } \mathbf{impair}.$$

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) : \text{la composée est } \mathbf{paire}.$$

Exercice 7

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer son maximum et justifier qu'elle est paire.

Correction

$$f(-x) = f(x) : \text{la fonction est } \mathbf{paire}. \quad 1 + x^2 \geq 1, \text{ donc } f(x) \leq 1, \text{ avec égalité pour } x = 0 : \text{le maximum vaut } 1.$$