

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 2

Ensembles et applications

Opérations · Injection · Surjection · Bijection

Ce que nous allons apprendre

- Les opérations sur les ensembles
- Les lois de De Morgan
- Applications : image et antécédent
- Injectivité et surjectivité
- Bijection et réciproque
- Composition d'applications

Quatre constructions

Notation	Définition
$A \cap B$	$x \in A$ et $x \in B$
$A \cup B$	$x \in A$ ou $x \in B$
$A \setminus B$	$x \in A$ et $x \notin B$
$\overline{A}$	complémentaire dans E

IDENTITÉ UTILE

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Passer au complémentaire

LOIS

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

DÉMONSTRATION TYPE

$x \in \overline{A \cup B}$ signifie $x \notin A$ **et** $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ — et réciproquement.

DISTRIBUTIVITÉ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Par double inclusion

- 1 Je montre $A \subset B$: je prends $x \in A$ et j'arrive à $x \in B$.
- 2 Je montre $B \subset A$ de la même façon.
- 3 Je conclus $A = B$.

VARIANTE

Une chaîne d'**équivalences** fait les deux sens d'un coup — à condition que chaque étape soit réversible.

Trois notions clés

Notion	Définition
Injective	$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
Surjective	tout $y \in F$ a au moins un antécédent
Bijective	tout $y \in F$ a exactement un antécédent

MÉTHODE

Je résous l'équation $f(x) = y$: **au plus** une solution donne l'injectivité, **au moins** une donne la surjectivité.

La fonction affine

Énoncé. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$.

1 $f(a) = f(b)$ donne $2a = 2b$, donc $a = b$: **injective**.

2 $2x - 3 = y$ a la solution $x = \frac{y + 3}{2}$: **surjective**.

3 Elle est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y + 3}{2}$.

Rendre une fonction bijective

Exemple. $g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

- ❶ Pas injective : $g(-2) = g(2)$.
- ❷ Pas surjective sur $\mathbb{R}$: -1 n'a pas d'antécédent.
- ❸ Mais $g : [0 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$ est **bijective**, de réciproque $\sqrt{\cdot}$.

Enchaîner deux applications

DÉFINITION

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Si...	Alors...
f et g injectives	$g \circ f$ injective
f et g surjectives	$g \circ f$ surjective
f et g bijectives	$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image directe et réciproque

DÉFINITIONS

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} \quad \cdot \quad f^{-1}(B) = \{x ; f(x) \in B\}.$$

PROPRIÉTÉ

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

ATTENTION

Pour l'intersection, on a seulement $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

APPLICATION 1

Une égalité ensembliste

Énoncé. Montrer que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- 1 x appartient au membre de gauche si $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$.
- 2 C'est exactement $x \in A \setminus B$ et $x \in A \setminus C$.
- 3 Les étapes étant réversibles, les ensembles sont égaux.

APPLICATION 2

Une image à déterminer

Énoncé. $g(x) = x^2 - 4x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $g(\mathbb{R})$.

- ➊ $g(x) = (x - 2)^2 - 4$.
- ➋ Le carré est positif, donc $g(x) \geq -4$.
- ➌ Toute valeur ≥ -4 est atteinte : $g(\mathbb{R}) = [-4; +\infty[$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Point clé
De Morgan	le complémentaire échange $\cap$ et $\cup$
Égalité d'ensembles	double inclusion
Injective	au plus un antécédent
Surjective	au moins un antécédent
Bijective	exactement un ; f^{-1} existe