



Ensembles et applications — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Ensembles et applications

Série 2 — opérations sur les ensembles, injections et surjections.

Exercice 1

Soient $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{3; 4; 5\}$ dans $E = \{1; \dots; 6\}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $\overline{A}$.

Correction

$$A \cap B = \{3; 4\}; A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}; A \setminus B = \{1; 2\}; \overline{A} = \{5; 6\}.$$

Exercice 2

Démontrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Correction

$x \in \overline{A \cup B}$ signifie $x \notin A$ et $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$, donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Les deux implications étant réversibles, les ensembles sont égaux.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 3$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Correction

Pour tout y , l'équation $2x - 3 = y$ a l'unique solution $x = \frac{y+3}{2}$: f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$.

Exercice 4

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g , puis proposer une restriction qui la rend bijective.

Correction

g n'est pas injective ($g(-2) = g(2)$) ni surjective (-1 n'a pas d'antécédent). La restriction $g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ est **bijective**, de réciproque $\sqrt{\cdot}$.

Exercice 5

Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$, puis $(f \circ g)^{-1}$ si elle existe sur un domaine adapté.

Correction

$(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ et $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$. Sur $[0; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[$, $f \circ g$ est bijective et $(f \circ g)^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$.

Exercice 6

Montrer que, pour tous ensembles A et B , $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Correction

$x \in A \setminus B$ signifie $x \in A$ et $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A$ et $x \in \overline{B}$, donc $x \in A \cap \overline{B}$ — et réciproquement.

Exercice 7

Soit $f : E \rightarrow F$ et A, B deux parties de E . Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Correction

$y \in f(A \cup B)$ s'il existe $x \in A \cup B$ avec $y = f(x)$, donc $x \in A$ ou $x \in B$, soit $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Réciproquement, $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$, d'où l'égalité.