

1ÈRE BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES · LEÇON 1

Logique mathématique

Quantificateurs · Équivalences · Récurrence

Ce que nous allons apprendre

- Propositions et tables de vérité
- Implication et équivalence
- Quantificateurs imbriqués
- Contraposée et absurde
- Récurrence simple et avec inégalité
- Démontrer une inégalité

Deux implications

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	et	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

CONSÉQUENCE

Démontrer une équivalence, c'est démontrer les **deux** implications (ou enchaîner des équivalences réversibles).

La définition d'une limite

PROPOSITION

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) (|u_n - \ell| < \varepsilon)$$

SA NÉGATION

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N) (|u_n - \ell| \geq \varepsilon)$$

RÈGLE

Chaque quantificateur s'échange, l'ordre est **conservé**, la propriété finale est niée.

Quand l'hypothèse est rebelle

PRINCIPE

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Exemple. Si n^2 est impair alors n est impair.

- 1 Contraposée : n pair $\Rightarrow n^2$ pair.
- 2 $n = 2k$ donne $n^2 = 4k^2$, pair.
- 3 La contraposée est vraie, donc l'énoncé aussi.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

- 1 Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec la fraction **irréductible**.
- 2 $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair, $p = 2k$.
- 3 Alors $q^2 = 2k^2$: q est pair aussi, ce qui contredit l'irréductibilité.

GÉNÉRALISATION

Le même raisonnement montre que $\sqrt{p}$ est irrationnel pour tout nombre premier p .

Une inégalité

Énoncé. Montrer que $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

- ➊ Initialisation : $2^4 = 16 \geq 16 \checkmark$.
- ➋ Hérédité : $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$.
- ➌ Et $2n^2 \geq (n+1)^2$ car $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ pour $n \geq 3$.

Une récurrence arithmétique

Énoncé. $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1 $n = 0 : 0 = 6 \times 0 \checkmark$.
- 2 $(n + 1)^3 - (n + 1) = (n^3 - n) + 3n(n + 1)$.
- 3 $n(n + 1)$ est pair, donc $3n(n + 1)$ est divisible par 6 : hérédité acquise.

L'inégalité triangulaire

ÉNONCÉ

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

- 1 Les deux membres sont positifs : on peut élever au carré.
- 2 L'inégalité équivaut à $2ab \leq 2|ab|$, toujours vraie.
- 3 L'égalité a lieu si et seulement si $ab \geq 0$, c'est-à-dire a et b de **même signe**.

APPLICATION 1

Une équivalence

Énoncé. Montrer que $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$.

- 1 $\Leftarrow$ est immédiat.
- 2 $\Rightarrow$: $a^2 \geq 0$ et $b^2 \geq 0$, et une somme de positifs est nulle seulement si chacun l'est.
- 3 Donc $a^2 = b^2 = 0$, soit $a = b = 0$.

Le piège des exemples

Énoncé. « $n^2 + n + 41$ est premier » est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

- ➊ $n = 0, 1, 2$ donnent 41, 43, 47 : tous premiers.
- ➋ Mais $n = 40$ donne $40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41$.
- ➌ La proposition est **fausse** : des exemples ne démontrent rien.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Équivalence	double implication
Négation quantifiée	échanger $\forall$ et $\exists$
Hypothèse difficile	contraposée
Irrationalité	absurde
Propriété sur $\mathbb{N}$	récurrence
Inégalité	passer au carré (si positif)