

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 11

Vecteurs de l'espace et géométrie analytique

Coordonnées · Colinéarité · Coplanarité

Ce que nous allons apprendre

- Les vecteurs de l'espace
- Le repère et les coordonnées
- Norme et milieu
- Colinéarité et alignement
- Coplanarité et base de l'espace
- Représentation paramétrique d'une droite

Trois nombres au lieu de deux

Objet	Formule
$\vec{AB}$	$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
$\vec{u} + \vec{v}$	somme terme à terme
$k\vec{u}$	$(kx; ky; kz)$
Norme (orthonormé)	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Milieu de $[AB]$	moyennes des trois coordonnées

Distance et milieu

Exemple. $A(1; 0; 2)$ et $B(4; -2; 5)$.

1 $\vec{AB}(3; -2; 3)$.

2 $AB = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$.

3 Milieu : $\left(\frac{5}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$.

Des coordonnées proportionnelles

CRITÈRE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$: les trois coordonnées sont alors **proportionnelles**.

Exemple. $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; 2 ; 0)$, $C(5 ; 3 ; -1)$.

- ❶ $\vec{AB}(2 ; 1 ; -1)$ et $\vec{AC}(4 ; 2 ; -2)$.
- ❷ $\vec{AC} = 2\vec{AB}$: les points sont **alignés**.

Un système à résoudre

CRITÈRE

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

MÉTHODE

Le système a **trois** équations et deux inconnues : je détermine a et b avec deux équations, puis je **vérifie** la troisième.

Vérifier la troisième ligne

Énoncé. $\vec{u}(1; 2; -1)$, $\vec{v}(2; -1; 3)$, $\vec{w}(4; 3; 1)$.

- ➊ Système : $a + 2b = 4$, $2a - b = 3$, $-a + 3b = 1$.
- ➋ Les deux premières donnent $a = 2$ et $b = 1$.
- ➌ Vérification : $-2 + 3 = 1$ ✓ — les vecteurs sont **coplanaires**.

Trois vecteurs non coplanaires

THÉORÈME

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ne sont pas coplanaires, tout vecteur de l'espace s'écrit de façon **unique** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

REPÈRE NATUREL D'UN CUBE

$(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$: chaque sommet a des coordonnées formées de 0 et de 1.

Représentation paramétrique

FORME

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exemple. $A(1 ; 2 ; 0)$ et $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ donnent $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$

.

APPARTENANCE

Un point appartient à la droite s'il existe **une même** valeur de t pour les trois équations.

Les longueurs classiques

CUBE D'ARÊTE a

$$\text{diagonale d'une face} = a\sqrt{2} \quad \text{grande diagonale} = a\sqrt{3}$$

- 1 Dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$, G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.
- 2 $AG = a\sqrt{1 + 1 + 1} = a\sqrt{3}$.

APPLICATION 1

Alignement dans l'espace

Énoncé. $A(0; 1; 2)$, $B(2; 3; 4)$, $C(5; 6; 7)$ sont-ils alignés ?

- ➊ $\vec{AB}(2; 2; 2)$ et $\vec{AC}(5; 5; 5)$.
- ➋ $\vec{AC} = \frac{5}{2}\vec{AB}$.
- ➌ Les vecteurs sont colinéaires : les points sont **alignés**.

APPLICATION 2

Quatre points coplanaires

Énoncé. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(-1; 2; 3)$.

- ➊ $\vec{AB}(-1; 2; 0)$, $\vec{AC}(-1; 0; 3)$, $\vec{AD}(-2; 2; 3)$.
- ➋ La 2^e ligne donne $a = 1$, la 3^e donne $b = 1$.
- ➌ Vérification : $-1 - 1 = -2 \checkmark$ — les points sont **coplanaires**.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Distance	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Alignement	$\vec{AC} = k\vec{AB}$
Coplanarité	$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec vérification
Droite	représentation paramétrique
Cube d'arête a	$a\sqrt{2}$ et $a\sqrt{3}$