

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 10

Étude des fonctions

Plan d'étude · Asymptotes · Courbes · TVI

Ce que nous allons apprendre

- Le plan d'une étude complète
- Limites aux bornes et asymptotes
- Tableau de variations
- Le théorème des valeurs intermédiaires
- Encadrer une solution
- Tracer la courbe

Sept étapes dans l'ordre

Étape	Ce que je fais
1	domaine de définition
2	parité (réduire le domaine)
3	limites aux bornes
4	dérivée et son signe
5	tableau de variations
6	asymptotes
7	courbe et tangentes

Un polynôme de degré 3

Énoncé. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

- ➊ $D_f = \mathbb{R}$; limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.
- ➋ $f'(x) = 3x(x - 2)$: f croît, décroît sur $[0 ; 2]$, puis croît.
- ➌ Maximum local $f(0) = 4$; minimum local $f(2) = 0$.

Quand la courbe touche l'axe

CRITÈRE

α est une racine **double** de f si $f(\alpha) = 0$ **et** $f'(\alpha) = 0$: la courbe est alors tangente à l'axe des abscisses.

Suite de l'exemple. $f(2) = 0$ et $f'(2) = 0$.

- ❶ 2 est une racine double.
- ❷ $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$.

Les trois cas

Asymptote	Condition
Verticale $x = a$	limite infinie en a
Horizontale $y = \ell$	limite finie en $\pm\infty$
Oblique $y = ax + b$	$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$

EXEMPLE

$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x + 2}$: asymptote oblique $y = x - 2$ et verticale $x = -2$.

4 · UN QUOTIENT

Étude de $\frac{2x+3}{x-1}$

- 1 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; limite 2 en $\pm\infty$.
- 2 En 1^- : $-\infty$; en 1^+ : $+\infty$.
- 3 $f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0$: décroissante sur chaque intervalle.

Existence et unicité

THÉORÈME

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a ; b]$ et si $f(a) f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a ; b[$.

RÉDACTION

Je cite les trois conditions : continuité, stricte monotonie, changement de signe.

La dichotomie

Exemple. $x^3 + x - 3 = 0$ sur $[1 ; 2]$.

- ❶ $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: strictement croissante.
- ❷ $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: une unique solution.
- ❸ $f(1,5) = 1,875 > 0$, donc la solution est dans $[1 ; 1,5]$.

Réduire le travail

Propriété	Conséquence
f paire	courbe symétrique / axe des ordonnées
f impaire	courbe symétrique / origine

MÉTHODE

J'étudie sur $[0 ; +\infty[$ puis je complète la courbe par **symétrie**, sans refaire les calculs.

APPLICATION 1

Un minimum utile

Énoncé. $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Quel rectangle d'aire 4 a le plus petit demi-périmètre ?

- 1 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ s'annule en $x = 2$.
- 2 Le minimum vaut $f(2) = 4$.
- 3 C'est le **carré** de côté 2 qui minimise le demi-périmètre.

APPLICATION 2

Une asymptote oblique

Énoncé. $h(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- 1 $h'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$: minimum $h(1) = 2$.
- 2 $h(x) - x = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.
- 3 La droite $y = x$ est **asymptote oblique**.

L'essentiel de la leçon

Étape	Point d'attention
Limites	toutes les bornes ouvertes
Dérivée	signe, pas seulement les zéros
Extremum	changement de signe requis
Asymptote oblique	effectuer la division
TVI	continuité + monotonie + signes