



Étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Étude des fonctions

Série 2 — études complètes, branches infinies et courbes.

Exercice 1

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. Calculer les limites en $\pm\infty$.
2. Étudier les variations de f .
3. Dresser le tableau de variations.

Correction

1. $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$: f croît sur $] -\infty ; 0]$, décroît sur $[0 ; 2]$, croît sur $[2 ; +\infty[$.
3. Maximum local $f(0) = 4$, minimum local $f(2) = 0$.

Exercice 2

Pour la fonction précédente, montrer que 2 est une racine double de f et factoriser $f(x)$.

Correction

$f(2) = 0$ et $f'(2) = 0$: 2 est bien une racine double. $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$.

Exercice 3

Soit $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire les variations et le minimum de g .

Correction

1. $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$, donc $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.
2. g décroît sur $]0 ; 1]$ puis croît : son minimum vaut $g(1) = 3$.

Exercice 4

Soit $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.

1. Déterminer D_h et les limites aux bornes.
2. Montrer que la droite $y = x - 2$ est asymptote oblique.

Correction

1. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; limites $\mp\infty$ en $\mp\infty$; en -2^- : $-\infty$ et en -2^+ : $+\infty$.
2. $h(x) = x - 2 + \frac{3}{x+2}$ et $\frac{3}{x+2} \rightarrow 0$: la droite est asymptote oblique.

Exercice 5

Soit $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer le minimum de f et l'interpréter : quel rectangle d'aire 4 a le plus petit demi-périmètre ?

Correction

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ s'annule en $x = 2$; le minimum vaut $f(2) = 4$. Le rectangle de côtés 2 et 2 — c'est-à-dire le **carré** — minimise le demi-périmètre.

Exercice 6

Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution sur $[1; 2]$, puis en donner un encadrement d'amplitude 0,5.

Correction

$f(x) = x^3 + x - 3$ est continue, strictement croissante ($f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$), avec $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: il y a une **unique** solution.
 $f(1,5) = 3,375 + 1,5 - 3 = 1,875 > 0$, donc la solution est dans $[1; 1,5]$.

Exercice 7

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$. Étudier la parité de f et en déduire une réduction du domaine d'étude.

Correction

$f(-x) = x^4 - 2x^2 = f(x)$: la fonction est **paire**. Il suffit de l'étudier sur $[0; +\infty[$ puis de compléter la courbe par symétrie d'axe l'axe des ordonnées.