

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 9

Dérivation

Nombre dérivé · Formules · Tangentes · Variations

Ce que nous allons apprendre

- Le nombre dérivé et son interprétation
- Les dérivées usuelles
- Les opérations sur les dérivées
- La dérivée d'une fonction composée
- L'équation de la tangente
- Dérivée et sens de variation

Une limite de taux

DÉFINITION

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

INTERPRÉTATION

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

Le tableau de base

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Les règles de calcul

Expression	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$n u' u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Appliquer les règles

- 1 $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ donne $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$.
- 2 $g(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$ donne
 $g'(x) = 2(x^2 + 3) + (2x - 1)2x = 6x^2 - 2x + 6$.
- 3 $h(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ donne $h'(x) = \frac{-3}{(x - 1)^2}$.

Ne pas oublier u'

FORMULES

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (\sin u)' = u' \cos u$$

Exemples.

❶ $(x^2 - 3x)^4$ a pour dérivée $4(2x - 3)(x^2 - 3x)^3$.

❷ $\sqrt{3x + 1}$ a pour dérivée $\frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.

Une équation en trois données

FORMULE

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2.

- ❶ $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3.$
- ❷ $f'(x) = 3x^2 - 3$, donc $f'(2) = 9.$
- ❸ $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15.$

Le signe de f' décide

Sur un intervalle	Conclusion
$f' > 0$	f est croissante
$f' < 0$	f est décroissante
$f' = 0$ avec changement de signe	extremum local
$f' = 0$ sans changement	tangente horizontale, pas d'extremum

Du signe au tableau

Exemple. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- ➊ $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
- ➋ f' est positive hors de $[0 ; 2]$, négative entre.
- ➌ Maximum local $f(0) = 2$; minimum local $f(2) = -2$.

APPLICATION 1

Tangentes horizontales

Énoncé. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Où la tangente est-elle horizontale ?

- ➊ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$.
- ➋ f' s'annule en 1 et 3.
- ➌ Les points sont (1 ; 5) et (3 ; 1).

APPLICATION 2

Un minimum à trouver

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- ➊ $f(x) = x + \frac{1}{x}$, donc $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.
- ➋ f' s'annule en 1 en changeant de signe.
- ➌ Le minimum vaut $f(1) = 2$.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Formule
Nombre dérivé	limite du taux de variation
Produit	$u'v + uv'$
Quotient	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Composée	ne pas oublier u'
Tangente	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$