

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 8

# Limite d'une fonction

---

Formes indéterminées · Asymptotes

# Ce que nous allons apprendre

---

- Limites en l'infini et en un point
- Les opérations sur les limites
- Les quatre formes indéterminées
- Les techniques de levée
- Les limites de référence
- Les asymptotes

## 1 · FORMES INDÉTERMINÉES

# Les quatre cas à travailler

| Forme                   | Technique                        |
|-------------------------|----------------------------------|
| $\frac{\infty}{\infty}$ | factoriser par le terme dominant |
| $\frac{0}{0}$           | factoriser et simplifier         |
| $\infty - \infty$       | conjugué ou factorisation        |
| $0 \times \infty$       | réécrire en quotient             |

### ATTENTION

$\frac{k}{0}$  n'est **pas** indéterminée : le signe du dénominateur donne  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

## Le terme dominant

### RÈGLE

Une fonction rationnelle a, en  $\pm\infty$ , la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré**.

### Exemples.

- 1  $\frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7} \sim \frac{3x^2}{2x^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$
- 2  $\frac{4x^3 + x}{x^2 - 1} \sim 4x \rightarrow -\infty$  en  $-\infty$ .

## Toujours un facteur commun

**Exemple.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ .

- 1 Numérateur :  $(x - 1)(x - 2)$ .
- 2 Dénominateur :  $(x - 2)(x + 2)$ .
- 3 Après simplification :  $\frac{x - 1}{x + 2} \rightarrow \frac{1}{4}$ .

## 4 · LE CONJUGUÉ

### Lever un $\infty - \infty$

**Exemple.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - x \right).$

- ➊ Je multiplie et divise par  $\sqrt{x^2 + x} + x$ .
- ➋ J'obtiens  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$
- ➌ Je factorise par  $x$  :  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$

## À connaître par cœur

### TRIGONOMETRIQUES

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Application.**  $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \times \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 3.$

### MÉTHODE

Je fais apparaître le même argument au numérateur et au dénominateur.

## Trois types

| Asymptote              | Condition                                    |
|------------------------|----------------------------------------------|
| Verticale $x = a$      | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$    |
| Horizontale $y = \ell$ | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ |
| Oblique $y = ax + b$   | $\lim (f(x) - (ax + b)) = 0$                 |

### ASTUCE

Pour une asymptote oblique, j'effectue la **division** :  $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ .

## Gauche et droite

**Exemple.**  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$ .

- 1 En  $3^-$  : le numérateur tend vers  $7 > 0$ , le dénominateur vers  $0^-$ , donc  $-\infty$ .
- 2 En  $3^+$  : le dénominateur tend vers  $0^+$ , donc  $+\infty$ .
- 3 En  $\pm\infty$  : la limite vaut  $2$ . Asymptotes :  $x = 3$  et  $y = 2$ .

## APPLICATION 1

# Une asymptote oblique

Énoncé.  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ .

- 1 La division donne  $f(x) = x + 2 - \frac{3}{x + 1}$ .
- 2  $\frac{3}{x + 1} \rightarrow 0$  en  $+\infty$ .
- 3 La droite  $y = x + 2$  est **asymptote oblique**.

## APPLICATION 2

# Trois limites d'affilée

**Énoncé.** Calculer les trois limites suivantes.

1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x}{3x^2 - 1} = \frac{5}{3}.$

2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x) = -\infty.$

3  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

## L'essentiel de la leçon

| Situation                    | Réflexe                   |
|------------------------------|---------------------------|
| Rationnelle en $\infty$      | termes de plus haut degré |
| Forme $\frac{0}{0}$          | factoriser                |
| Racines et $\infty - \infty$ | conjugué                  |
| $\frac{k}{0}$                | étudier le signe          |
| Asymptote oblique            | effectuer la division     |