

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 7

Rotation dans le plan

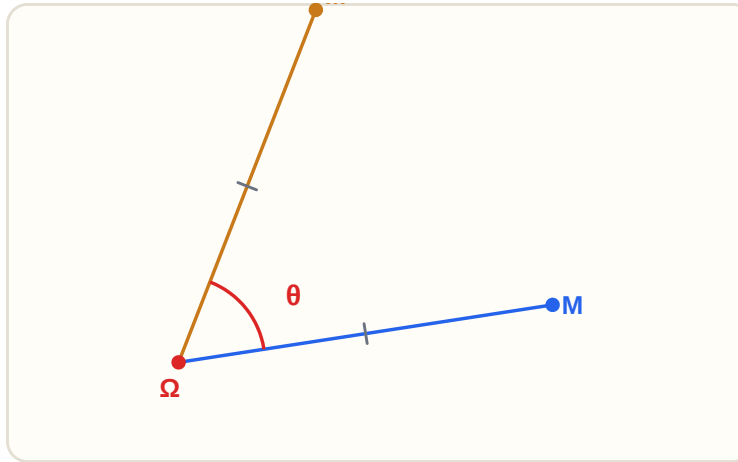
Définition · Conservations · Compositions

Ce que nous allons apprendre

- Définir la rotation de centre O et d'angle α
- Construire l'image d'un point et d'une figure
- Les propriétés conservées
- Les cas particuliers
- Composer deux rotations
- Utiliser une rotation dans une démonstration

1 · DÉFINITION

Tourner autour d'un centre



DÉFINITION

$R(M) = M'$ avec $OM' = OM$ et $(\vec{OM}; \vec{OM'}) = \alpha$. Le centre O est invariant.

Une isométrie

Propriété	Conservée ?
Longueurs	oui
Angles	oui
Aires	oui
Alignement et milieux	oui
Orientation	oui

CONSÉQUENCE

L'image d'une figure lui est **isométrique** : même forme, même taille, seule la position change.

Deux angles remarquables

Angle	Transformation obtenue
$\alpha = 0$ ou 2π	l'identité
$\alpha = \pi$	la symétrie centrale de centre O
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	quart de tour direct

EN COORDONNÉES (CENTRE O)

Angle $\frac{\pi}{2}$: $(x; y) \mapsto (-y; x)$. · Angle π : $(x; y) \mapsto (-x; -y)$.

Des rotations cachées

PROPRIÉTÉ

Dans un polygone régulier à n côtés de centre O , la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ envoie chaque sommet sur le **suivant**.

Polygone	Angle
Triangle équilatéral	$\frac{2\pi}{3}$
Carré	$\frac{\pi}{2}$
Hexagone	$\frac{\pi}{3}$

Même centre : on ajoute

THÉORÈME

La composée de deux rotations de **même centre** O , d'angles α et β , est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \beta$.

Exemples.

- 1 $\frac{\pi}{4}$ puis $\frac{3\pi}{4}$: rotation d'angle π , c'est-à-dire la symétrie centrale.
- 2 Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ répétée trois fois : angle π .

La méthode au compas

- 1 Je trace le cercle de centre O passant par M .
- 2 Je reporte l'angle α à partir de $[OM)$, dans le bon **sens**.
- 3 M' est l'intersection de la demi-droite obtenue et du cercle.

VÉRIFICATION

$OM' = OM$: la distance au centre ne change jamais.

La rotation comme outil

PRINCIPE

Si une rotation envoie $[CD]$ sur $[BE]$, alors $CD = BE$: c'est une isométrie.

COMMENT LA TROUVER

Je cherche un centre où deux longueurs égales se rejoignent, et un angle commun entre les deux figures.

APPLICATION 1

Le carré

Énoncé. $ABCD$ est un carré direct de centre O , R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre O .

- ➊ $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto D, D \mapsto A$.
- ➋ O est invariant.
- ➌ L'image du triangle ABO est le triangle BCO , qui lui est isométrique.

APPLICATION 2

Deux triangles équilatéraux

Énoncé. Sur les côtés de ABC , on construit à l'extérieur les triangles équilatéraux ABD et ACE . Montrer que $BE = CD$.

- 1 La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie D sur B .
- 2 Elle envoie aussi C sur E .
- 3 Elle conserve les distances : $DC = BE$.

L'essentiel de la leçon

Point clé	Ce que je retiens
Définition	$OM' = OM$ et angle α
Point invariant	le centre O seulement
Nature	isométrie directe
$\alpha = \pi$	symétrie centrale
Composition (même centre)	on ajoute les angles