

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 6

Calcul trigonométrique

Addition · Duplication · Équations

Ce que nous allons apprendre

- Les formules d'addition
- Les formules de duplication
- La linéarisation
- Calculer des valeurs exactes
- Résoudre les équations trigonométriques
- Démontrer une identité

Les quatre formules

Expression	Développement
$\cos(a + b)$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b)$	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b)$	$\sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a - b)$	$\sin a \cos b - \cos a \sin b$

MÉMO

Pour le cosinus, les signes sont **inversés** ; pour le sinus, ils suivent l'énoncé.

Décomposer l'angle

Exemple. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$.

① $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

② $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$.

③ $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Trois formes pour $\cos 2a$

FORMULES

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

ASTUCE

Je choisis la forme qui fait apparaître ce que je connais déjà ($\cos a$ ou $\sin a$).

À partir d'un cosinus

Énoncé. $\cos x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

1 $\sin x = \frac{4}{5}$ (positif dans ce quadrant).

2 $\cos 2x = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$.

3 $\sin 2x = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

Supprimer les carrés

FORMULES

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

USAGE

Très utile pour simplifier un quotient ou préparer une intégration.

Exemple.
$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x.$$

4 · ÉQUATIONS

Les trois formes de base

Équation	Solutions dans $\mathbb{R}$
$\cos x = \cos a$	$x = \pm a + 2k\pi$
$\sin x = \sin a$	$x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$
$\tan x = \tan a$	$x = a + k\pi$

DERNIÈRE ÉTAPE

Je sélectionne ensuite les solutions appartenant à l'intervalle demandé.

Poser $X = \cos x$

Exemple. Résoudre $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$.

① $2X^2 - 3X + 1 = 0$ donne $X = 1$ ou $X = \frac{1}{2}$.

② $\cos x = 1 : x = 0$.

③ $\cos x = \frac{1}{2} : x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Mettre en facteur

Exemple. Résoudre $\sin 2x = \sin x$ dans $\mathbb{R}$.

- 1 $2 \sin x \cos x - \sin x = 0.$
- 2 $\sin x (2 \cos x - 1) = 0.$
- 3 $x = k\pi$ ou $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

APPLICATION 1

Une identité

Énoncé. Montrer que $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

- 1 C'est une différence de carrés : $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$.
- 2 Le second facteur vaut 1.
- 3 Il reste $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

APPLICATION 2

Un angle composé

Énoncé. Résoudre $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi[$.

- ❶ $2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$
- ❷ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi.$
- ❸ Sur $[0; 2\pi[: \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}.$

L'essentiel de la leçon

Formule	Écriture
$\cos(a + b)$	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a + b)$	$\sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin 2a$	$2 \sin a \cos a$
$\cos 2a$	$2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
$\cos x = \cos a$	$x = \pm a + 2k\pi$