

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 5

Produit scalaire et applications

Al-Kashi · Médiane · Cercles · Distances

Ce que nous allons apprendre

- Les expressions du produit scalaire
- Orthogonalité et nature d'un angle
- Al-Kashi et l'aire d'un triangle
- La relation de la médiane
- Cercles, tangentes et lieux
- Distance d'un point à une droite

Quatre écritures

Donnée	Formule
Coordonnées (orthonormé)	$xx' + yy'$
Normes et angle	$\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$
Carré scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$
Polarisation	$\frac{1}{2} (\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$

RAPPEL

Le résultat est un **nombre réel**, jamais un vecteur.

Le critère et le signe

THÉORÈME

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemple. $A(0; 2)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$.

- ❶ $\vec{AB}(4; 3)$ et $\vec{AC}(3; -4)$.
- ❷ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 - 12 = 0$.
- ❸ Le triangle est **rectangle en A**.

Al-Kashi et l'aire

AL-KASHI

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

AIRE

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

Exemple. $AB = 5$, $AC = 7$, $\hat{A} = 60^\circ$: $BC = \sqrt{39}$ et $\mathcal{A} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$.

Une relation à connaître

ÉNONCÉ (I MILIEU DE $[BC]$)

$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

- 1 $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$ et $\vec{MC} = \vec{MI} - \vec{IB}$.
- 2 En élevant au carré et en additionnant, les doubles produits s'éliminent.
- 3 Il reste $2MI^2 + 2IB^2$, avec $IB = \frac{BC}{2}$.

Trois situations classiques

Relation	Lieu de M
$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$	cercle de diamètre $[AB]$
$MA^2 + MB^2 = k$	cercle de centre I (milieu)
$MA = MB$	médiatrice de $[AB]$

EXEMPLE

$AB = 8$ et $MA^2 + MB^2 = 82 : 2MI^2 + 32 = 82$, donc $MI = 5$.

Équation et tangente

ÉQUATION

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Exemple. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$.

- ➊ Je complète les carrés : $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$.
- ➋ Centre $\Omega(1 ; -4)$, rayon 3.
- ➌ Tangente en T : droite passant par T de vecteur normal $\vec{\Omega T}$.

D'un point à une droite

FORMULE

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple. $A(3; 1)$ et $(D) : 4x - 3y + 5 = 0$.

- ➊ Numérateur : $|12 - 3 + 5| = 14$.
- ➋ Dénominateur : $\sqrt{16 + 9} = 5$.
- ➌ $d = \frac{14}{5} = 2,8$.

APPLICATION 1

Un angle obtus

Énoncé. $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 12$. Nature de l'angle $\hat{A}$?

- 1 Al-Kashi : $144 = 36 + 64 - 96 \cos \hat{A}$.
- 2 $\cos \hat{A} = \frac{-44}{96} = -\frac{11}{24}$.
- 3 Le cosinus est négatif : l'angle est **obtus**.

APPLICATION 2

Une tangente

Énoncé. Tangente au cercle $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ au point $T(4; 2)$.

- 1 Centre $\Omega(1; -2)$, donc $\vec{\Omega T}(3; 4)$.
- 2 Ce vecteur est **normal** à la tangente.
- 3 $3(x - 4) + 4(y - 2) = 0$, soit $3x + 4y - 20 = 0$.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Formule
Calculer	$xx' + yy'$
Orthogonalité	produit scalaire nul
Côté d'un triangle	Al-Kashi
Médiane	$2MI^2 + \frac{BC^2}{2}$
Distance point-droite	$\frac{ ax_0+by_0+c }{\sqrt{a^2+b^2}}$