

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 4

Barycentre dans le plan

Définition · Associativité · Lieux géométriques

Ce que nous allons apprendre

- Définir le barycentre de points pondérés
- La relation fondamentale
- Les coordonnées du barycentre
- Homogénéité et associativité
- Isobarycentre et centre de gravité
- Déterminer un lieu géométrique

1 · DÉFINITION

Un point d'équilibre

DÉFINITION

Si $\sum \alpha_i \neq 0$, le barycentre G de $\{(A_i; \alpha_i)\}$ est l'unique point tel que

$$\sum \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

CONDITION

La somme des coefficients doit être **non nulle** : sinon le barycentre n'existe pas.

L'outil le plus utile

POUR TOUT POINT M

$$\sum \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum \alpha_i \right) \vec{MG}$$

CAS DE DEUX POINTS

G barycentre de $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ donne $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$.

Exemple. $\{(A; 3); (B; 1)\}$: $\vec{AG} = \frac{1}{4} \vec{AB}$, G est au quart de $[AB]$.

Une moyenne pondérée

FORMULES

$$x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \qquad y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$$

Exemple. $A(1 ; 2)$, $B(5 ; -2)$, $C(3 ; 6)$ avec les coefficients 2, 1, 1.

❶ $x_G = \frac{2 + 5 + 3}{4} = 2,5.$

❷ $y_G = \frac{4 - 2 + 6}{4} = 2$, donc $G(2,5 ; 2)$.

Homogénéité et associativité

HOMOGÉNÉITÉ

Multiplier **tous** les coefficients par un même réel $k \neq 0$ ne change pas le barycentre.

ASSOCIATIVITÉ

On peut remplacer un sous-groupe de points par leur barycentre partiel, affecté de la **somme** de leurs coefficients.

Exemple. G barycentre de $\{(A; 2); (B; 3); (C; 5)\}$: avec H barycentre de $\{(A; 2); (B; 3)\}$, G est le **milieu** de $[HC]$.

Tous les coefficients égaux

Points	Isobarycentre
A, B	milieu de $[AB]$
A, B, C	centre de gravité du triangle
Parallélogramme $ABCD$	centre O du parallélogramme

CENTRE DE GRAVITÉ

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$, où I est le milieu de $[BC]$.

Reconnaître un cercle

MÉTHODE

Je réduis $\sum \alpha_i \vec{MA}_i$ en $(\sum \alpha_i) \vec{MG}$, puis l'équation devient $|\sum \alpha_i| \times MG = k$.

Exemple. $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = 6$.

- ❶ G barycentre de $\{(A; 2); (B; 1)\}$: l'expression vaut $3\vec{MG}$.
- ❷ $3MG = 6$, donc $MG = 2$.
- ❸ Le lieu est le **cercle** de centre G et de rayon 2.

Les réflexes de l'exercice

On demande...	J'utilise...
de construire G	$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB}$
les coordonnées	moyenne pondérée
de simplifier 3 points	associativité
un lieu géométrique	relation fondamentale

APPLICATION 1

Le centre d'un parallélogramme

Énoncé. Montrer que le centre O de $ABCD$ est l'isobarycentre des quatre sommets.

- 1 O est le milieu de $[AC]$: $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$.
- 2 O est aussi le milieu de $[BD]$: $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$.
- 3 En additionnant, la somme des quatre vecteurs est nulle.

APPLICATION 2

Trouver un coefficient

Énoncé. $A(0; 0)$, $B(6; 3)$. Pour quel α le barycentre de $\{(A; \alpha); (B; 2)\}$ a-t-il pour abscisse 4 ?

1
$$x_G = \frac{\alpha \times 0 + 2 \times 6}{\alpha + 2} = \frac{12}{\alpha + 2}.$$

2
$$\frac{12}{\alpha + 2} = 4 \text{ donne } \alpha + 2 = 3.$$

3
$$\alpha = 1.$$

L'essentiel de la leçon

Notion	Écriture
Définition	$\sum \alpha_i G \vec{A}_i = \vec{0}$
Relation fondamentale	$\sum \alpha_i M \vec{A}_i = (\sum \alpha_i) M \vec{G}$
Coordonnées	moyenne pondérée
Associativité	remplacer un sous-groupe
Lieu	cercle de centre G