



Suites numériques — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Suites numériques

Série 2 — suites arithmétiques et géométriques, sommes et récurrence.

Exercice 1

(u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{20} puis $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Correction

1. $u_n = 5 + 3n$.
2. $u_{20} = 65$; $S = \frac{21 \times (5 + 65)}{2} = 735$.

Exercice 2

(v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n .
2. Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_6$.

Correction

1. $v_n = 2 \times 3^n$.
2. $S = 2 \times \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3^7 - 1 = 2\,186$.

Exercice 3

Soit $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Correction

1. $u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{4}{3}, u_2 = \frac{7}{4}$.
2. $u_n = \frac{3(n+2)-5}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2}$; comme $\frac{5}{n+2}$ décroît, u_n **croît**.

Exercice 4

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. On pose $v_n = u_n + 3$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire u_n en fonction de n .

Correction

1. $u_1 = 5, u_2 = 13, u_3 = 29$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$: géométrique de raison 2, avec $v_0 = 4$.
3. $v_n = 4 \times 2^n$, donc $u_n = 4 \times 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3$.

Exercice 5

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$ vérifie $u_n \geq 1$.

Correction

Initialisation. $u_0 = 4 - 3 = 1 \geq 1$. **Hérédité.** Si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 3 \geq 2 + 3 = 5 \geq 1$. **Conclusion.** La propriété est vraie pour tout n .

Exercice 6

Une somme de 10 000 dh est placée à intérêts composés au taux annuel de 4 %.

1. Exprimer le capital C_n après n années.
2. Calculer C_{10} à 1 dh près.

Correction

1. (C_n) est géométrique de raison 1,04 : $C_n = 10\,000 \times 1,04^n$.
2. $C_{10} = 10\,000 \times 1,04^{10} \approx 14\,802$ dh.

Exercice 7

(u_n) est arithmétique avec $u_3 = 11$ et $u_8 = 31$.

1. Calculer la raison puis u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .

Correction

1. $u_8 - u_3 = 5r = 20$, donc $r = 4$ et $u_0 = u_3 - 3r = 11 - 12 = -1$.
2. $u_n = -1 + 4n$.