

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 3

Suites numériques

Arithmétiques · Géométriques · Sommes · Suite auxiliaire

Ce que nous allons apprendre

- Modes de définition d'une suite
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Les sommes de termes
- Monotonie d'une suite
- La suite auxiliaire

Arithmétique ou géométrique ?

Suite	Relation	Terme général
Arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_n = u_0 + nr$
Géométrique	$u_{n+1} = q u_n$	$u_n = u_0 q^n$

À PARTIR D'UN RANG p

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

Le bon test

MÉTHODE

Je calcule $u_{n+1} - u_n$: si c'est une **constante**, la suite est arithmétique.

Je calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: si c'est une **constante**, elle est géométrique.

Exemple. $u_n = 5 + 3n$: $u_{n+1} - u_n = 3$, arithmétique de raison 3.

Exemple. $v_n = 2 \times 3^n$: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, géométrique de raison 3.

Deux formules

ARITHMÉTIQUE

$$S = \frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$$

GÉOMÉTRIQUE ($q \neq 1$)

$$S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Attention : de u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes, pas n .

Appliquer les formules

Exemple 1. $u_0 = 5, r = 3$: calculer $u_0 + \cdots + u_{20}$.

❶ $u_{20} = 5 + 60 = 65$ et il y a 21 termes.

❷ $S = \frac{21 \times 70}{2} = 735$.

Exemple 2. $v_0 = 2, q = 3$: calculer $v_0 + \cdots + v_6$.

❸ $S = 2 \times \frac{3^7 - 1}{2} = 2186$.

Deux techniques

Technique	Conclusion
Signe de $u_{n+1} - u_n$	> 0 croissante, < 0 décroissante
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (termes > 0)	> 1 croissante, < 1 décroissante
Fonction associée	variations de f avec $u_n = f(n)$

EXEMPLE

$u_n = 3 - \frac{5}{n+2}$: la quantité retranchée décroît, donc u_n **croît**.

Traiter $u_{n+1} = au_n + b$

MÉTHODE

Je résous $\ell = a\ell + b$ pour trouver le **point fixe** ℓ , puis je pose $v_n = u_n - \ell$: la suite (v_n) est **géométrique** de raison a .

Exemple. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- ❶ $\ell = 2\ell + 3$ donne $\ell = -3$; on pose $v_n = u_n + 3$.
- ❷ $v_{n+1} = 2v_n$, avec $v_0 = 4$: $v_n = 4 \times 2^n$.
- ❸ $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Prouver une propriété

Énoncé. Montrer que $u_n \geq 1$ pour $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- ➊ **Initialisation** : $u_0 = 1 \geq 1 \checkmark$.
- ➋ **Hérédité** : si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 3 \geq 5 \geq 1$.
- ➌ **Conclusion** : vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À partir de deux termes

Énoncé. (u_n) arithmétique avec $u_3 = 11$ et $u_8 = 31$.

- ➊ $u_8 - u_3 = 5r = 20$, donc $r = 4$.
- ➋ $u_0 = u_3 - 3r = 11 - 12 = -1$.
- ➌ $u_n = 4n - 1$.

APPLICATION 1

Un placement financier

Énoncé. 10 000 dh placés à 4 % par an, intérêts composés.

- ➊ Chaque année, le capital est multiplié par 1,04 : suite **géométrique**.
- ➋ $C_n = 10\,000 \times 1,04^n$.
- ➌ $C_{10} \approx 14\,802$ dh.

APPLICATION 2

Une suite à étudier

Énoncé. $u_n = \frac{3n + 1}{n + 2}$.

1 $u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{4}{3}, u_2 = \frac{7}{4}$.

2 $u_n = 3 - \frac{5}{n + 2}$.

3 La suite est **croissante** et reste inférieure à 3.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Arithmétique	$u_n = u_0 + nr$
Géométrie	$u_n = u_0 q^n$
Somme arithmétique	$\frac{nb \times (1er + dernier)}{2}$
Somme géométrique	$u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
$u_{n+1} = au_n + b$	poser $v_n = u_n - \ell$