



Notions de logique — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Notions de logique

Série 2 — quantificateurs, équivalences et démonstrations.

Exercice 1

Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 + x + 1 > 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 = -1)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) (y > x)$

Correction

1. $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 + x + 1 \leq 0).$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 \neq -1).$
3. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (y \leq x).$

Exercice 2

Montrer, par une table de vérité, que $\overline{P \Rightarrow Q}$ équivaut à « P et $\overline{Q}$ ».

Correction

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Les deux dernières colonnes coïncident : les propositions sont équivalentes.

Exercice 3

Montrer par contraposée que, pour tous réels x et y , si $x \neq y$ alors $(x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.

Correction

Contraposée : si $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$ alors $x = y$. En développant : $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$, donc $2y = 2x$ et $x = y$.

Exercice 4

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de rationnel r tel que $r^2 = 3$.

Correction

Supposons $r = \frac{p}{q}$ irréductible avec $p^2 = 3q^2$. Alors $3 \mid p^2$, donc $3 \mid p$ (car 3 est premier) : $p = 3k$. Il vient $9k^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3k^2$, donc $3 \mid q$: contradiction avec l'irréductibilité.

Exercice 5

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Correction

Initialisation. $n = 0 : 4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$. **Hérédité.** Si $4^n - 1 = 3k$, alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$. **Conclusion.** La propriété est vraie pour tout n .

Exercice 6

Soit $P(x) : \ll x^2 > 4 \gg$ et $Q(x) : \ll x > 2 \gg$.

1. L'implication $Q(x) \Rightarrow P(x)$ est-elle vraie pour tout réel x ?
2. Et la réciproque ?

Correction

1. Vraie : si $x > 2$, alors $x^2 > 4$.
2. Fausse : pour $x = -3$, on a $x^2 = 9 > 4$ mais $x < 2$. Il n'y a donc pas équivalence.

Exercice 7

Montrer que, pour tout réel x , on a $|x| \leq \frac{1+x^2}{2}$.

Correction

$$\frac{1+x^2}{2} - |x| = \frac{1-2|x|+x^2}{2} = \frac{(|x|-1)^2}{2} \geq 0, \text{ car } x^2 = |x|^2.$$