

1ÈRE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · LEÇON 1

Notions de logique

Propositions · Quantificateurs · Raisonnements

Ce que nous allons apprendre

- Propositions et tables de vérité
- Connecteurs et lois de De Morgan
- Quantificateurs et négations
- Implication, réciproque, contraposée
- Absurde et contre-exemple
- Le raisonnement par récurrence

La table de vérité

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

UNE SEULE LIGNE FAUSSE

$P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.

Réécrire une implication

DEUX ÉCRITURES ÉQUIVALENTES

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

NÉGATION

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \text{ et } \overline{Q}$$

DE MORGAN

$$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q} \cdot \overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}.$$

Nier sans se tromper

Proposition	Négation
$(\forall x) P(x)$	$(\exists x) \overline{P(x)}$
$(\exists x) P(x)$	$(\forall x) \overline{P(x)}$
$(\forall x)(\exists y) P$	$(\exists x)(\forall y) \overline{P}$

RÈGLE

Chaque quantificateur est **échangé**, l'ordre reste le même, et la propriété est niée.

3 · ATTENTION À L'ORDRE

Deux énoncés très différents

PREMIER ÉNONCÉ

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) (y > x)$: **vrai**, il suffit de prendre $y = x + 1$.

SECOND ÉNONCÉ

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) (y > x)$: **faux**, aucun réel n'est plus grand que tous les autres.

LEÇON

Permuter $\forall$ et $\exists$ change complètement le sens.

Démontrer autrement

Exemple. Si $x \neq y$ alors $(x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.

- 1 Contraposée : si $(x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1)$ alors $x = y$.
- 2 En développant : $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$.
- 3 $2y = 2x$, donc $x = y$: la contraposée est vraie.

Un classique

Énoncé. Montrer qu'il n'existe pas de rationnel r tel que $r^2 = 3$.

- ➊ Supposons $r = \frac{p}{q}$ **irréductible** avec $p^2 = 3q^2$.
- ➋ $3 \mid p^2$ donc $3 \mid p : p = 3k$, d'où $q^2 = 3k^2$.
- ➌ $3 \mid q$ aussi : contradiction avec l'irréductibilité.

Réfuter en une ligne

PRINCIPE

Pour montrer que $(\forall x) P(x)$ est fausse, il suffit d'un **seul** contre-exemple.

EXEMPLE

« $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ » est fausse : pour $x = -3$, on a $x^2 = 9 > 4$ mais $x < 2$.

CONSÉQUENCE

L'implication est vraie dans un sens seulement : il n'y a **pas équivalence**.

Les trois étapes

- 1 **Initialisation** : vérifier au premier rang.
- 2 **Hérédité** : supposer vraie au rang n , prouver au rang $n + 1$.
- 3 **Conclusion** : vraie pour tout $n \geq n_0$.

RÉDACTION

On écrit clairement « supposons que $P(n)$ soit vraie » : c'est l'**hypothèse de récurrence**.

APPLICATION 1

Une divisibilité

Énoncé. Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1 $n = 0 : 4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0 \checkmark$.
- 2 Si $4^n - 1 = 3k$, alors $4^{n+1} - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3$.
- 3 $= 3(4k + 1)$: la propriété est héréditaire.

APPLICATION 2

Une inégalité

Énoncé. Montrer que $|x| \leq \frac{1+x^2}{2}$ pour tout réel x .

1 Je calcule la différence : $\frac{1+x^2}{2} - |x|$.

2 $= \frac{1 - 2|x| + x^2}{2}$, et $x^2 = |x|^2$.

3 $= \frac{(|x| - 1)^2}{2} \geq 0$: l'inégalité est démontrée.

L'essentiel de la leçon

Situation	Outil
Nier une implication	P et $\overline{Q}$
Nier un quantificateur	échanger $\forall$ et $\exists$
Hypothèse difficile	contraposée
Montrer une impossibilité	absurde
Réfuter un « pour tout »	contre-exemple
Propriété sur tout n	récurrence