

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 10

Barycentre dans le plan

Points pondérés · Moyenne pondérée · Lieux

Ce que nous allons apprendre

- Définition du barycentre
- La relation fondamentale
- Coordonnées du barycentre
- Associativité
- Lien avec la moyenne pondérée
- Lieux géométriques

1 · DÉFINITION

Un point d'équilibre

DÉFINITION (SI $\sum \alpha_i \neq 0$)

$$\sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

RELATION FONDAMENTALE

$$\sum \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum \alpha_i \right) \vec{MG}$$

IMAGE

Le barycentre est le point où la « balance » des masses s'équilibre.

Une formule directe

FORMULE

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

Coefficients	Position de G
$(1 ; 1)$	milieu de $[AB]$
$(2 ; 3)$	aux $\frac{3}{5}$ de $[AB]$ depuis A
$(3 ; 1)$	au quart depuis A

Une moyenne pondérée

FORMULES

$$x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} \quad y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$$

Exemple. $A(0 ; 2)$, $B(6 ; 0)$, $C(3 ; 6)$ de coefficients 1, 2, 3.

❶ $x_G = \frac{0 + 12 + 9}{6} = 3,5.$

❷ $y_G = \frac{2 + 0 + 18}{6} = \frac{10}{3}.$

Regrouper des points

ÉNONCÉ

On peut remplacer un sous-groupe de points par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple. G barycentre de $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$, I milieu de $[AC]$.

- 1 G est le barycentre de $\{(I; 2); (B; 2)\}$.
- 2 Coefficients égaux : G est le **milieu** de $[IB]$.

Le barycentre en statistique

LIEN

La moyenne $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$ est exactement l'abscisse du barycentre des x_i pondérés par les effectifs n_i .

Exemple. Prix 20, 35, 50 dh vendus en 100, 150, 50 unités.

- 1 Somme pondérée : $2\,000 + 5\,250 + 2\,500 = 9\,750$.
- 2 Prix moyen : $\frac{9\,750}{300} = 32,5$ dh.

Reconnaître un cercle

MÉTHODE

Je réduis $\sum \alpha_i \vec{MA}_i$ en $(\sum \alpha_i) \vec{MG}$, ce qui donne $MG = \text{constante}$.

Exemple. $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 12$.

- 1 G barycentre de $\{(A; 1); (B; 3)\}$: l'expression vaut $4 MG$.
- 2 $MG = 3$: le lieu est le **cercle** de centre G et de rayon 3.

Les réflexes

Question	Outil
Construire G	$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB}$
Coordonnées	moyenne pondérée
Trois points ou plus	associativité
Lieu géométrique	relation fondamentale

APPLICATION 1

Un prix moyen

Énoncé. Prix 15, 25, 40 dh ; quantités 200, 300, 100.

- 1 Somme pondérée : $3\,000 + 7\,500 + 4\,000 = 14\,500$.
- 2 Total des quantités : 600.
- 3 Prix moyen $\approx 24,17$ dh — c'est un barycentre.

APPLICATION 2

Un cercle

Énoncé. $AB = 6$; lieu des M tels que $\|2\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 8$.

- 1 Les coefficients sont égaux : G est le milieu I de $[AB]$.
- 2 L'expression vaut $4MI = 8$.
- 3 $MI = 2$: cercle de centre I et de rayon 2.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Définition	$\sum \alpha_i G \vec{A}_i = \vec{0}$
Relation fondamentale	$(\sum \alpha_i) \vec{MG}$
Coordonnées	moyenne pondérée
Associativité	regrouper des points
Lieu	cercle de centre G