

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 9

Étude des fonctions

Tableaux · Asymptotes · Optimisation

Ce que nous allons apprendre

- Le plan d'une étude complète
- Limites et asymptotes
- Tableau de variations
- Seuil de rentabilité
- Production optimale
- Minimiser un coût moyen

Six étapes

Étape	Contenu
1	domaine de définition
2	limites aux bornes
3	dérivée et signe
4	tableau de variations
5	asymptotes
6	courbe et interprétation

Étude de $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

- ➊ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$.
- ➋ f' est positive hors de $[1 ; 3]$, négative entre.
- ➌ Maximum local $f(1) = 5$; minimum local $f(3) = 1$.

3 · UN QUOTIENT

Étude de $\frac{2x+1}{x-1}$

- 1 $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; limite 2 en $\pm\infty$.
- 2 En 1^- : $-\infty$; en 1^+ : $+\infty$.
- 3 $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$: décroissante sur chaque intervalle.

4 · SEUIL DE RENTABILITÉ

Résoudre $B(x) = 0$

Exemple. $B(x) = -x^2 + 120x - 2\,000$ sur $[0 ; 120]$.

- ❶ $\Delta = 14\,400 - 8\,000 = 6\,400$, donc $\sqrt{\Delta} = 80$.
- ❷ Racines : 20 et 100.
- ❸ L'entreprise est bénéficiaire pour $20 < x < 100$.

Le sommet de la parabole

DEUX MÉTHODES

Forme canonique, ou $B'(x) = 0$ avec changement de signe.

Suite de l'exemple.

- 1 $B(x) = -(x - 60)^2 + 1\,600$.
- 2 Maximum 1 600 dh pour $x = 60$.
- 3 Le seuil et l'optimum sont deux notions **distinctes**.

Le minimiser

Exemple. $C_m(x) = x + \frac{900}{x} + 40$.

1 $C'_m(x) = \frac{x^2 - 900}{x^2}$.

2 C'_m s'annule en $x = 30$ en changeant de signe.

3 Coût moyen minimal : $C_m(30) = 100$.

Moyen égale marginal

PROPRIÉTÉ

Au minimum du coût moyen, celui-ci est **égal** au coût marginal.

Vérification. $C(x) = x^2 + 40x + 900$.

- ❶ $C'(x) = 2x + 40$, donc $C'(30) = 100$.
- ❷ $C_m(30) = 30 + 30 + 40 = 100$: les deux coïncident.

Existence d'une racine

THÉORÈME

f continue et strictement monotone sur $[a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$: une **unique** solution dans $]a; b[$.

Exemple. $x^3 - 3x - 1 = 0$ sur $]1; 2[$.

- ❶ $f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$.
- ❷ $f(1,5) = -2,125 < 0$: la solution est dans $]1,5; 2[$.

APPLICATION 1

Une étude complète

Énoncé. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

- 1** $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$.
- 2** Positive hors de $[-1 ; 3]$, négative entre.
- 3** Maximum local $f(-1) = 10$; minimum local $f(3) = -22$.

APPLICATION 2

Seuil et optimum

Énoncé. $B(x) = -2x^2 + 160x - 1\,400$ sur $[0 ; 80]$.

- ➊ $x^2 - 80x + 700 = 0$: racines 10 et 70.
- ➋ Bénéficiaire pour $10 < x < 70$.
- ➌ $B'(x) = -4x + 160$ s'annule en 40 : maximum 1 800 dh.

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Variations	signe de f'
Asymptote oblique	division
Seuil de rentabilité	$B(x) = 0$
Optimum	$B'(x) = 0$
Coût moyen minimal	$C_m = C'$