



Notions de logique — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Logique

Série 2 — quantificateurs, raisonnements et contre-exemples.

Exercice 1

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 + 1 > 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}) (2x + 1 = 0)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) (x + y > 0)$

Correction

1. $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 + 1 \leq 0).$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) (2x + 1 \neq 0).$
3. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (x + y \leq 0).$

Exercice 2

Dresser la table de vérité de $\overline{P}$ ou Q et la comparer à celle de $P \Rightarrow Q$.

Correction

P	Q	$\overline{P}$ ou Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Les deux colonnes sont identiques : les propositions sont **équivalentes**.

Exercice 3

Montrer par contraposée que, si $3n + 2$ est impair, alors n est impair.

Correction

Contraposée : si n est pair, alors $3n + 2$ est pair. Si $n = 2k$, alors $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, qui est pair. La contraposée est vraie.

Exercice 4

La proposition « pour tout réel x , $\frac{1}{x}$ existe » est-elle vraie ? Justifier.

Correction

Non : pour $x = 0$, l'expression n'est pas définie. Un **contre-exemple** suffit à réfuter la proposition.

Exercice 5

Montrer par l'absurde que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

Correction

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et x irrationnel. Si $r + x$ était rationnel, alors $x = (r + x) - r$ serait une différence de deux rationnels, donc rationnel : contradiction.

Exercice 6

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 2n + 1$.

Correction

Initialisation. $n = 0 : 1 \geq 1$ ✓. **Hérédité.** Si $3^n \geq 2n + 1$, alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$. **Conclusion.** L'inégalité est vraie pour tout n .

Exercice 7

Un commerçant affirme : « tous mes produits coûtent moins de 100 dh ». Comment réfuter cette affirmation ? Comment la prouver ?

Correction

Pour la **réfuter**, il suffit d'exhiber un seul produit à 100 dh ou plus (contre-exemple). Pour la **prouver**, il faut vérifier **tous** les produits, un par un.