

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 8

Dérivation

Formules · Tangentes · Coût marginal

Ce que nous allons apprendre

- Le nombre dérivé
- Les dérivées usuelles
- Produits et quotients
- L'équation de la tangente
- Dérivée et variations
- Coût marginal et optimum

Pente de la tangente

DÉFINITION

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

INTERPRÉTATION

C'est le coefficient directeur de la tangente, et — en économie — la **variation marginale** : l'effet d'une unité supplémentaire.

Usuelles et opérations

Expression	Dérivée
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Appliquer les règles

- ❶ $4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$ donne $12x^2 - 4x + 7$.
- ❷ $(2x + 3)(x - 5)$ donne $2(x - 5) + (2x + 3) = 4x - 7$.
- ❸ $\frac{3x - 1}{x + 4}$ donne $\frac{13}{(x + 4)^2}$.

Une formule, trois données

ÉQUATION

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $a = 4$.

- ❶ $f(4) = -3$.
- ❷ $f'(x) = 2x - 6$, donc $f'(4) = 2$.
- ❸ $y = 2(x - 4) - 3 = 2x - 11$.

4 · VARIATIONS

Le signe de f'

Sur un intervalle	Conclusion
$f' > 0$	f croissante
$f' < 0$	f décroissante
f' s'annule en changeant de signe	extremum

RAPPEL

Un zéro de f' sans changement de signe ne donne **pas** d'extremum.

La dérivée du coût

DÉFINITION

Le **coût marginal** est $C'(x)$: c'est le coût approximatif de l'unité suivante.

Exemple. $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 300$.

- ❶ $C'(x) = x + 20$.
- ❷ $C'(40) = 60$ dh.
- ❸ Produire la 41^e unité coûte environ 60 dh.

Coût marginal égale prix

DÉMONSTRATION

$B(x) = px - C(x)$, donc $B'(x) = p - C'(x)$; $B'(x) = 0$ équivaut à $C'(x) = p$.

Exemple. Prix 80 dh et $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 300$.

- ❶ $B'(x) = 80 - (x + 20) = 60 - x$.
- ❷ B' s'annule en $x = 60$ en changeant de signe.
- ❸ Bénéfice maximal : $B(60) = 1\,500$ dh.

Le minimiser

Exemple. $C(x) = x^2 + 100$, donc $C_m(x) = x + \frac{100}{x}$.

- 1 $C'_m(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$.
- 2 C'_m s'annule en $x = 10$ en changeant de signe.
- 3 Coût moyen minimal : $C_m(10) = 20$.

APPLICATION 1

Production optimale

Énoncé. $C(x) = x^2 + 40x + 500$, prix unitaire 120 dh.

- ➊ $B(x) = -x^2 + 80x - 500$.
- ➋ $B'(x) = -2x + 80$ s'annule en $x = 40$.
- ➌ Bénéfice maximal : $B(40) = 1\,100$ dh.

APPLICATION 2

Un minimum

Énoncé. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- ➊ $f(x) = x + \frac{4}{x}$.
- ➋ $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, qui s'annule en 2.
- ➌ Le minimum vaut $f(2) = 4$.

L'essentiel de la leçon

Notion	Formule
Produit	$u'v + uv'$
Quotient	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Tangente	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
Coût marginal	$C'(x)$
Optimum	$C'(x) = p$