

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 7

Limites d'une fonction

Indéterminations · Asymptotes · Coût moyen

Ce que nous allons apprendre

- Limites en l'infini
- Limites en un point
- Les formes indéterminées
- Le conjugué
- Les asymptotes
- Interpréter un coût moyen

Le terme dominant

RÈGLE

Une fonction rationnelle a la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré**.

- 1 $\frac{4x^2 - 3x}{x^2 + 5} \rightarrow 4$ (degrés égaux).
- 2 $\frac{2x + 1}{x^2 - 1} \rightarrow 0$ (degré du bas plus grand).
- 3 $\frac{x^3}{x} \rightarrow +\infty$ (degré du haut plus grand).

Factoriser et simplifier

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

- 1 Numérateur : $(x - 3)(x + 3)$.
- 2 Dénominateur : $(x - 3)(x - 2)$.
- 3 Après simplification : $\frac{x + 3}{x - 2} \rightarrow 6$.

3 · LE CONJUGUÉ

Lever un $\infty - \infty$

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x} - x \right).$

- ➊ Je multiplie par $\sqrt{x^2 + 6x} + x$.
- ➋ J'obtiens $\frac{6x}{\sqrt{x^2 + 6x} + x}.$
- ➌ En factorisant par x : la limite vaut 3.

À gauche et à droite

Exemple. $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$.

- 1 En 4^- : numérateur $\rightarrow 14 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^-$, donc $-\infty$.
- 2 En 4^+ : dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $+\infty$.
- 3 En $\pm\infty$: la limite vaut 3.

Trois types

Asymptote	Condition
Verticale $x = a$	limite infinie en a
Horizontale $y = \ell$	limite finie en $\pm\infty$
Oblique $y = ax + b$	$f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$

EXEMPLE

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x + 1} = x + 4 - \frac{2}{x + 1} : \text{asymptote oblique } y = x + 4.$$

Deux limites parlantes

DÉFINITION

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Exemple. $C(x) = x^2 + 100x + 2\,500$.

- ❶ $C_m(x) = x + 100 + \frac{2\,500}{x}$.
- ❷ En 0^+ : $+\infty$ — les coûts fixes pèsent sur très peu d'unités.
- ❸ En $+\infty$: la droite $y = x + 100$ est asymptote oblique.

Trois erreurs classiques

Erreur	Correction
Croire que $\frac{k}{0}$ est indéterminée	le signe décide
Oublier de factoriser en $\frac{0}{0}$	il y a toujours un facteur commun
Confondre coût moyen et marginal	quotient contre dérivée

APPLICATION 1

Trois limites

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 + x}{2x^2 - 3} = \frac{7}{2}.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 1}{x^2 + 2} = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12.$$

APPLICATION 2

Un coût moyen

Énoncé. $C(x) = 2x^2 + 30x + 800$.

- 1 $C_m(x) = 2x + 30 + \frac{800}{x}$.
- 2 En 0^+ : $+\infty$ (coûts fixes non amortis).
- 3 En $+\infty$: $+\infty$ (le coût variable domine).

L'essentiel de la leçon

Situation	Réflexe
Rationnelle en ∞	termes dominants
$\frac{0}{0}$	factoriser
Racine et $\infty - \infty$	conjugué
$\frac{k}{0}$	signe du dénominateur
Coût moyen	$\frac{C(x)}{x}$, asymptote oblique