

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 6

Fonction logarithme décimal

Propriétés · Équations · Durées de placement

Ce que nous allons apprendre

- Définition du logarithme décimal
- Les propriétés algébriques
- Variations et signe
- Équations logarithmiques
- Inéquations
- Calculer une durée de placement

1 · DÉFINITION

L'inverse de la puissance de 10

DÉFINITION

Pour $x > 0$, $\log x$ est l'unique réel y tel que $10^y = x$.

x	0,01	0,1	1	10	1 000
$\log x$	-2	-1	0	1	3

Transformer les opérations

Expression	Devient
$\log(ab)$	$\log a + \log b$
$\log \frac{a}{b}$	$\log a - \log b$
$\log(a^n)$	$n \log a$
$\log \sqrt{a}$	$\frac{1}{2} \log a$

LE LOGARITHME

transforme un **produit** en somme et une **puissance** en produit : c'est ce qui le rend utile pour les calculs d'intérêts.

Strictement croissante

PROPRIÉTÉ

$\log$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[: a < b \iff \log a < \log b$.

Intervalle	Signe de $\log x$
$]0 ; 1[$	négatif
$x = 1$	nul
$]1 ; +\infty[$	positif

Toujours la condition d'abord

RÈGLE

$$\log x = a \iff x = 10^a \quad (x > 0)$$

Exemple. Résoudre $\log x + \log(x - 3) = 1$.

- ❶ Condition : $x > 3$.
- ❷ $\log(x(x - 3)) = 1$, donc $x^2 - 3x - 10 = 0$.
- ❸ $x = 5$ (on rejette -2).

La croissance aide

Exemple. Résoudre $\log(2x - 4) < 1$.

- ➊ Condition : $2x - 4 > 0$, soit $x > 2$.
- ➋ $\log$ croît : $2x - 4 < 10$, donc $x < 7$.
- ➌ $S =]2 ; 7[$.

Combien d'années ?

MÉTHODE

De $q^n \geq k$ on passe à $n \log q \geq \log k$, puis on divise par $\log q$ — en **inversant** le sens si $\log q < 0$.

Exemple. Un capital à 5 % dépasse-t-il 1,5 fois sa valeur ?

- ❶ $1,05^n > 1,5$.
- ❷ $n > \frac{\log 1,5}{\log 1,05} \approx 8,3$.
- ❸ C'est à partir de la **9^e** année.

Quand $\log q$ est négatif

Énoncé. Une machine perd 12 % par an : quand vaut-elle la moitié ?

- 1 $0,88^n \leq 0,5$.
- 2 $n \log 0,88 \leq \log 0,5$, avec $\log 0,88 < 0$.
- 3 Le sens **s'inverse** : $n \geq 5,4$, donc à partir de la 6^e année.

APPLICATION 1

Simplifier

Énoncé. Calculer $\log 8 + \log 125$ et $\log 50 - \log 5$.

- ➊ $\log(8 \times 125) = \log 1\,000 = 3.$
- ➋ $\log \frac{50}{5} = \log 10 = 1.$
- ➌ Les propriétés évitent tout calcul numérique.

APPLICATION 2

Doubler un capital

Énoncé. À 6 % par an, en combien d'années un capital double-t-il ?

- 1 $1,06^n \geq 2.$
- 2 $n \geq \frac{\log 2}{\log 1,06} \approx \frac{0,301}{0,0253}.$
- 3 $n \geq 11,9$: il faut 12 ans.

L'essentiel de la leçon

Point clé	Formule
Définition	$\log x = y \iff 10^y = x$
Produit	$\log a + \log b$
Puissance	$n \log a$
Équation	$x = 10^a$, avec $x > 0$
Durée	$n \geq \frac{\log k}{\log q}$