



Étude des fonctions — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Étude des fonctions

Série 2 — études complètes et optimisation économique.

Exercice 1

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations.

Correction

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$: positive hors de $[1; 3]$, négative entre.
2. f croît jusqu'à $f(1) = 5$, décroît jusqu'à $f(3) = 1$, puis croît.

Exercice 2

Soit $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer D_g , les limites aux bornes et les asymptotes.
2. Calculer $g'(x)$ et conclure sur les variations.

Correction

1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; limite 2 en $\pm\infty$; $-\infty$ en 1^- et $+\infty$ en 1^+ : asymptotes $y = 2$ et $x = 1$.
2. $g'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$: g est **décroissante** sur chaque intervalle.

Exercice 3

Le bénéfice est $B(x) = -x^2 + 120x - 2\,000$ pour $x \in [0; 120]$.

1. Déterminer le seuil de rentabilité.
2. Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.

Correction

1. $\Delta = 14\,400 - 8\,000 = 6\,400$, $\sqrt{\Delta} = 80$: racines 20 et 100. L'entreprise est bénéficiaire pour $20 < x < 100$.
2. $B(x) = -(x-60)^2 + 1\,600$: maximum 1 600 dh pour $x = 60$.

Exercice 4

Le coût moyen est $C_m(x) = x + \frac{900}{x} + 40$ pour $x > 0$.

1. Calculer $C'_m(x)$.
2. Déterminer la production qui minimise le coût moyen.

Correction

1. $C'_m(x) = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 900}{x^2}$.
2. C'_m s'annule en $x = 30$ en changeant de signe : le coût moyen minimal vaut $C_m(30) = 100$.

Exercice 5

Montrer que, pour le coût $C(x) = x^2 + 900 + 40x$, le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Correction

$C'(x) = 2x + 40$ et $C_m(x) = x + \frac{900}{x} + 40$. Pour $x = 30$: $C'(30) = 100$ et $C_m(30) = 100$: les deux coïncident bien au minimum du coût moyen.

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier les variations et déterminer l'asymptote oblique.

Correction

$f(x) = x - \frac{4}{x}$, donc $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 0$: la fonction est **croissante**.
 $f(x) - x = -\frac{4}{x} \rightarrow 0$: la droite $y = x$ est asymptote oblique.

Exercice 7

Montrer que l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ admet une solution dans $]1; 2[$, puis l'encadrer à 0,5 près.

Correction

$f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$; $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ sur $]1; 2[$: la fonction est strictement croissante, la solution est **unique**. $f(1,5) = 3,375 - 4,5 - 1 = -2,125 < 0$: la solution est dans $]1,5; 2[$.